UNIVERSITÉ H. POINCARÉ, NANCY 1 ESIAL 1ère année

EXAMEN S.I.C. (Signal – Information – Communication)

Corrigé

Tous documents autorisés 20 avril 2004

Durée : 2 heures M. TOMCZAK

Exercice 1 :

Soit X(f) la transformée de Fourier d'un signal réel x(t). Montrer que le module de X(f), $|X(f)|$ est une fonction paire et que son argument $\angle X(f)$ est une fonction impaire.

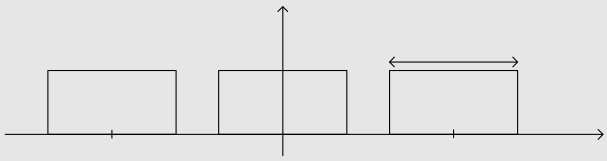
Par définition : $X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos(2\pi ft)dt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin(2\pi ft)dt=a-jb.$

De même, on a : $X(-f)=a+jb$. *X(f)* et *X(-f)* étant conjugués, ils ont le même module et sont d'argument opposé, ce que l'on vérifie : $|X(f)|=|X(-f)|=\sqrt{a^2+b^2}$ (le module est pair).

Et : $\angle X(f)=-\angle X(-f)=-Arctg\dfrac{b}{a}$ (l'argument est impair).

Exercice 2 :

Soit le signal continu périodique x(t) suivant, de période T=2π :



Montrer que le développement en série de Fourier de x(t) est donné par :

$$x(t)=\lambda+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\lambda\pi)\cos(nt)}{n}.$$

Le signal *x(t)* étant pair, les coefficients b_n sont nuls, le développement en série de Fourier s'écrit :

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)\text{, avec : } a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}dt=\lambda \text{ et :}$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\cos(nt)dt\,\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n\lambda\pi)}{n}-\frac{\sin(-n\lambda\pi)}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\lambda\pi)}{n}.$$

D'où le résultat cherché.

Exercice 3 :

Déterminer la transformée de Laplace du produit de convolution suivant :

$f(t)*g(t)=\int_0^t\tau\left(1-e^{-(t-\tau)}\right)d\tau=\int_0^t(t-\tau)\left(1-e^{-\tau}\right)d\tau$ *, où f(t)=t.1(t) et g(t)=(1-e^{-t}).1(t).*

Vérifier le résultat obtenu par calcul de l'intégrale de convolution.

$$L[f*g]=F(s).G(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\text{ (décomp. en éléments simples)}$$

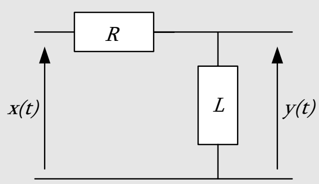
x(t)

Par transformée de Laplace inverse, il vient : $f*g=\left(0.5t^2-t+1-e^{-t}\right).1(t)$. D'autre part :

$$f*g=\int_0^t\tau\left(1-e^{-(t-\tau)}\right)d\tau=\int_0^t\tau d\tau-e^{-t}\int_0^t\tau e^{\tau}d\tau=\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t-e^{-t}\left(\left[\tau e^{\tau}\right]_0^t-\int_0^t e^{\tau}d\tau\right)=\frac{t^2}{2}-e^{-t}\left(te^t-\left(e^t-1\right)\right)=\frac{t^2}{2}-t+1-e^{-t}.$$

Exercice 4 :

Soit le filtre RL représenté sur la figure ci-contre, d'entrée x(t) et de sortie y(t) :



a) Déterminer sa fonction de transfert $G(s)$.

b) Montrer que sa réponse impulsionnelle est donnée par $g(t)=\delta(t)-(R/L)e^{-\frac{R}{L}t}.1(t)$.

c) Etablir l'expression de sa réponse indicielle.

a) On a : $X(s)=R.I(s)+Ls.I(s)$; $Y(s)=Ls.I(s)$; d'où $G(s)\stackrel{\Delta}{=}\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{Ls}{R+Ls}=\dfrac{s}{s+R/L}$.

b) En remarquant que $G(s)=1-\dfrac{R/L}{s+R/L}$, le résultat cherché vient immédiatement par transformée de Laplace inverse.

c) La réponse indicielle est la réponse à un échelon, on a donc :

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{s}{s+R/L}.\frac{1}{s}=\frac{1}{s+R/L}\text{, d'où : } y(t)=e^{-\frac{R}{L}t}.1(t).$$

Exercice 5 :

*Etablir les conditions pour qu'un signal, constitué d'une sinusoïde **à temps discret**,* $x(n)=\sin(\omega_0 n)$, *soit périodique.*

Le signal étant discret, sa période est un entier *N*. On a dans ce cas : $\sin(\omega_0 n)=\sin(\omega_0(n+N))$. Pour que cette égalité soit vérifiée quelque soit *n*, il faut $\omega_0(n+N)=\omega_0 n+2k\pi$ (*k* entier). En effet, $\omega_0(n+N)=\pi-\omega_0 n+2k\pi$ n'est possible que si ω_0 varie avec *n*. La condition est donc : $\omega_0 N=2k\pi$.

Soit : $\omega_0=2\pi\dfrac{k}{N}$, c'est-à-dire $f_0=\dfrac{k}{N}$. *k* et *N* étant entiers, la fréquence f_0 doit donc être rationnelle.

Exercice 6 :

Un signal modulé en amplitude, $x(t)=\sin(4\omega_0 t).\cos(2\omega_0 t)$ *, est échantillonné avec une période* $T_e=\pi/(3\omega_0)$.

Rappel : $\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)=\dfrac{\sin p+\sin q}{2}$.

a) Déterminer les fréquences f, $0\le f\le 3\omega_0/(2\pi)$*, présentes dans le signal échantillonné.*

b) Le théorème d'échantillonnage a-t-il été respecté ?

a,b) $x(t)=\dfrac{e^{j4\omega_0 t}-e^{-j4\omega_0 t}}{2j}.\dfrac{e^{j2\omega_0 t}+e^{-j2\omega_0 t}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{j6\omega_0 t}-e^{-j6\omega_0 t}}{2j}+\dfrac{e^{j2\omega_0 t}-e^{-j2\omega_0 t}}{2j}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sin(6\omega_0 t)+\sin(2\omega_0 t)\right)$.

Les fréquences présentes AVANT échantillonnage sont donc $2f_0$ et $6f_0$ avec $f_0=\omega_0/2\pi$, c'est-à-dire $\dfrac{\omega_0}{\pi}$ et $\dfrac{3\omega_0}{\pi}$.

La fréquence d'échantillonnage étant $f_e=\dfrac{3\omega_0}{\pi}$, il est clair que celle-ci est trop faible pour assurer un échantillonnage sans repliement spectral de la seconde fréquence (théorème de Shannon non respecté). Le spectre de *x(t)* est constitué de 2 Dirac de mesure $\pi/2$ en $\omega=-2\omega_0$ et $-6\omega_0$, et de 2 Dirac de mesure $-\pi/2$ en $\omega=2\omega_0$ et $6\omega_0$. APRÈS échantillonnage idéal, on retrouve ces mêmes Dirac, ainsi que leurs répliques, aux mêmes pulsations $\pm n\omega_e\ (n=0,1,2,\ldots)$. Comme $\omega_e=6\omega_0$, ne subsistent dans l'intervalle limité par la pulsation de Nyquist $\omega_N=\omega_e/2$, que 2 Dirac, aux pulsations $-2\omega_0$ et $+2\omega_0$ (fréquences $\pm\omega_0/\pi$), de mesures respectives $\pi/2$ et $-\pi/2$ (les 2 Dirac apparaissant par repliement à la fréquence zéro se compensent puisqu'ils sont de signe opposé). Finalement, la seule fréquence présente après échantillonnage dans l'intervalle $[0,3\omega_0/2\pi]$ est $2\omega_0$.

Exercice 7 :

Soit le signal à temps discret : $x(n)=a^n.1(n), 0<a<1$.

a) Calculer la transformée de Fourier $X(\omega)$ *de* $x(n)$.

b) Le résultat est alors discrétisé aux N fréquences équidistantes : $\omega_k=2\pi k/N$ *où k=0,1,…,N-1. Donner l'expression de* $X(\omega_k)$.

c) Comparer $X(\omega_k)$ *avec X(k), la transformée de Fourier discrète d'ordre N du signal x(n).*

a) Par définition : $X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$.

b) On a immédiatement : $X(\omega_k)=X(2\pi k/N)=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$.

c) Par définition, la TFD s'écrit : $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1}a^n e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(ae^{-j2\pi k/N}\right)^n=\frac{1-a^N e^{-j2\pi k}}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$

On constate donc que $X(k)\approx X(\omega_k)$ si N est grand (a<1).

Exercice 8 :

Déterminer les résultats des séquences d'instructions Matlab suivantes :

```
>>x=[1 2 3] ;
>>y=[5 4 0] ;
>>conv(x,y)
ans =
        ?
```

```
>>X=fft(x) ;
>>Y=fft(y) ;
>>P=X.*Y ;
>>z=real(ifft(P))
z =
        ?
```

```
>>X2=fft(x,5) ;
>>Y2=fft(y,5) ;
>>P2=X2.*Y2 ;
>>z2=real(ifft(P2))
z2 =
        ?
```

Dans le premier cas, on calcule un produit de convolution discret (le résultat Matlab étant de dimension 2x3 – 1 = 5) :

```
…0 0 1 2 3 0 0…
…0 4 5 0 0 0 0…     →  5
…0 0 4 5 0 0 0…     →  14
…0 0 0 4 5 0 0…     →  23
…0 0 0 0 4 5 0…     →  12
…0 0 0 0 0 4 5…     →  0
```

d'où le résultat : `ans = 5 14 23 12 0`

Dans le deuxième cas, on tente d'effectuer le même calcul dans le domaine fréquentiel (produit simple au lieu du produit de convolution) et de revenir dans le domaine temporel. Mais, du fait de la **discrétisation** en fréquence effectuée lors du calcul de la transformée de Fourier discrète (*la fft ou transformée de Fourier rapide n'est qu'une forme d'algorithme optimisée pour le calcul de transformées de Fourier discrètes*), une **périodisation** se produit dans le domaine temporel. Le résultat obtenu est donc erroné et correspond à une convolution circulaire qui peut se schématiser comme suit (dans Matlab, z est de dimension identique à celle des 2 signaux de départ) :

```
              1 2 3
…0 4 5 0 4 5 0 4 5 0…→17
…5 0 4 5 0 4 5 0 4 5…→14
…4 5 0 4 5 0 4 5 0 4…→23
```

d'où : `ans = 17 14 23`

Enfin, dans le dernier cas, on prend la précaution de rajouter deux valeurs nulles à la fin de chaque signal (ou on calcule les fft sur 5 points, ce qui revient au même) pour éviter ces problèmes de convolution circulaire, et l'on retrouve donc le résultat initial :

```
              1 2 3
…5 0 0 0 4 5 0 0 0 4…→5
…4 5 0 0 0 4 5 0 0 0…→14
…0 4 5 0 0 0 4 5 0 0…→23
…0 0 4 5 0 0 0 4 5 0…→12
…0 0 0 4 5 0 0 0 4 5…→0
```

d'où : `ans = 5 14 23 12 0`

Exercice 9 :

a) *Soit la séquence d'instructions Matlab suivante :*

```
N=1024 ;fe=1000 ;Te=1/fe ;
y1=2*sin(2*pi*(0:N-1)/(.02*fe)+pi/4) ;
k=0:N-1 ; y2=cos(2*pi*100*k*Te) ;
y=y1+y2 ; t=k*Te ; plot(t,y)
```

Expliquer globalement ce que réalise ce programme puis commenter chaque instruction. Préciser notamment les valeurs des fréquences, en indiquant s'il s'agit de fréquences absolues ou normalisées par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

b) *Expliquer à présent le but des instructions suivantes. Compléter le programme de façon à obtenir successivement un graphe gradué entre 0 et fe/2, puis entre –fe/2 et fe/2.*

```
Y=abs(fft(y)); plot(0:N/2-1,Y(1:N/2)),pause
f= ???; plot(f,Y(1:N/2)),pause
f2= ???; plot(f2, ???)
```

a) Ce programme crée un signal constitué par la somme de deux sinusoïdes et trace le résultat en fonction du temps. Le nombre d'échantillons est fixé à N=1024, la fréquence d'échantillonnage est fixée à 1000 Hz (la période d'échantillonnage est donc de 1/1000ème de seconde). Le premier signal est un sinus d'amplitude 2, de déphasage $\pi/4$ et de fréquence absolue 50 Hz (soit une fréquence normalisée de 0.05). Le deuxième signal est un cosinus d'amplitude 1, de déphasage nul et de fréquence absolue 100 Hz (soit une fréquence normalisée de 0.1). Le tracé s'effectue en fonction de la base de temps t en secondes.

b) La suite du programme est destinée à faire l'analyse spectrale par transformée de Fourier du signal précédent, on représente en fait le module de sa transformée de Fourier discrète. Dans un premier temps, on représente la partie du spectre comprise entre 0 et fe/2 en fonction du n° d'échantillon. Puis, on gradue en fréquence : `f=(0:N/2-1)*fe/N; plot(f,Y(1:N/2))`. On pouvait aussi utiliser la commande `linspace: f=linspace(0,fe/2-fe/N,N/2)`. Enfin, on représente le spectre entre –fe/2 et fe/2, gradué en fréquence :
`f2=(-N/2 :N/2-1)*fe/N; plot(f2,fftshift(Y))` ou `plot(f2,[Y(N/2+1 :N) Y(1 :N/2)])`

Exercice 10 :
Déterminer le taux de premier dépassement et la pulsation de résonance du filtre de fonction de transfert

$$G(s)=\frac{100\pi^2}{s^2+10\pi s+100\pi^2}.$$

Ce filtre est un 2ème ordre pseudopériodique de forme standard : $\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$, donc de pulsation propre $\omega_0=10\pi$ et de coefficient d'amortissement $\zeta=0,5$. Le taux de 1er dépassement et la pulsation de résonance sont donnés par :

$$D_1=100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=100e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\approx 16,3\% \ ; \ \omega_R=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}=\frac{10\pi}{\sqrt{2}}\approx 22,214\text{rad./s.}$$

Questions de cours :
a) Quelle est la relation entre la transformée de Laplace d'un signal échantillonné et sa transformée en z ?
b) Donner un exemple de signal à bande étroite et un exemple de signal à bande large.
c) Qu'est ce qu'un recouvrement ou repliement spectral ?
d) Donner un équivalent discret de la fonction de transfert G(s) précédente (exercice 10), par approximation rectangulaire.
e) Dans quel cas la transformée de Fourier d'un signal est-elle périodique ?
f) Montrer que la densité spectrale d'énergie d'un signal continu est égale au carré du module de sa transformée de Fourier.

a) La transformée de Laplace d'un signal échantillonné est égale à la transformée en z du signal évaluée pour $z=e^{sT_e}$: $X'(s)=X(z)\big|_{z=e^{sT_e}}$.

b) Exemple de signal à bande étroite : sinusoïde. Exemples de signaux à bande large : bruit blanc, impulsion de Dirac.

c) Le phénomène de recouvrement ou repliement spectral se produit lors de l'échantillonnage d'un signal à support spectral non-limité, quelque soit la fréquence d'échantillonnage. Dans le cas d'un signal à support spectral borné, ces recouvrements ne se produisent que si le théorème d'échantillonnage n'est pas respecté. Dans les deux cas, les recouvrements spectraux sont dus à la périodisation du spectre du signal entraînée par l'échantillonnage (qui correspond à une discrétisation) et, comme leur nom l'indique, correspondent à des chevauchements ou recouvrements entre répliques spectrales.

d) L'approximation rectangulaire consiste à poser : $s=\frac{z-1}{T_e z}$, on a donc immédiatement :

$$G(s)=\frac{100\pi^2}{s^2+10\pi s+100\pi^2}\xrightarrow{s=\frac{z-1}{T_e z}}\frac{100\pi^2}{\left(\frac{z-1}{T_e z}\right)^2+10\pi\frac{z-1}{T_e z}+100\pi^2}=\frac{100\pi^2T_e^2}{1+10\pi T_e+100\pi^2T_e^2-(2+10\pi T_e)z^{-1}+z^{-2}}$$

e) Dans le cas d'un signal à temps discret, donc en particulier pour un signal échantillonné.

f) Par définition, la densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation : $\Phi_x(\omega) = F[\phi_x(\tau)]$. Or, la fonction d'autocorrélation peut s'écrire comme un produit de convolution : $\phi_x(\tau) = x^*(-t) * x(t)$.

On en tire : $\Phi_x(\omega) = F[x^*(-t) * x(t)] = F[x^*(-t)].F[x(t)] = X^*(f).X(f) = |X(f)|^2$.