Ecole Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine – 1ère année
Rédacteurs : Tony Bourdier & Jean-François Scheid
Date : Mardi 1er avril 2008
Durée : 2 heures

Examen final – Mathématiques Numériques

Calculatrices, machines électroniques et ordinateurs portables **interdits**
Documents autorisés : une feuille A4 (recto et verso) manuscrite comportant uniquement des rappels de cours (*i.e.* exercices interdits) **à rendre** avec votre composition.

Remarques : La clareté de la rédaction est un élément important de l'évaluation. Le barême est donnée à titre indicatif. Cet énoncé est composé de plusieurs exercices indépendants. Il n'est pas demandé de traiter les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont présentés.
Merci de composer sur deux copies séparées[1].

1. Discrimination par moindres carrés *(/* 5 points */)*

On cherche à utiliser la méthode des moindres carrés pour effectuer une discrimination sur un ensemble d'iris. L'objectif de cette discrimination est de trouver une relation mathématique entre les caractéristiques de l'iris (longeur et largeur des sépales et des pétales) et leur type : setosa, viriginica ou versicolor. On note w la longueur des sépales, x leur largeur, y la longueur des pétales, z leur largeur et t le type de l'iris. Les caractéristiques w, x, y et z sont des réels mais t est un vecteur à 3 dimensions :

$$t = \begin{pmatrix} st \\ vg \\ vs \end{pmatrix}$$

tel que $st = 1$ ssi l'iris est un setosa, $vg = 1$ ssi l'iris est un virginica et $vs = 1$ ssi l'iris est un verscolor. Par exemple, un iris dont les caractéristiques sont les suivantes : $w = 5.1$, $x = 3.5$, $y = 1.4$, $z = 0.2$ et $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un setosa dont la longueur des pétales est de $5.1cm$, ...
On pose donc le modèle suivant :

$$t = \begin{pmatrix} st \\ vg \\ vs \end{pmatrix} = f(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} z$$

1. *(2,5 points)* On effectue m mesures $(w_i, x_i, y_i, z_i, t_i)_{1\le i\le m}$, étant entendu que connaître t_i signifie connaître st_i, vg_i et vs_i. On cherche à déterminer le modèle f qui réalise

$$\min_f \sum_{i=1}^{m} ||f(w_i, x_i, y_i, z_i) - t_i||^2. \tag{1}$$

   Déterminez la matrice A pour que le problème s'exprime sous forme standard :

$$\min_{u\in\mathbb{R}^{12}} ||\, A\,u - v\,||^2$$

   avec
$$\begin{array}{rcl} u &=& (\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1,\ \ \alpha_2, \beta_2, \delta_2, \gamma_2,\ \ \alpha_3, \beta_3, \delta_3, \gamma_3)^T \in \mathbb{R}^{12}, \\ v &=& (st_1, \cdots, st_m,\ \ vg_1, \cdots, vg_m,\ \ vs_1, \cdots, vs_m) \in \mathbb{R}^{3m}. \end{array}$$

2. *(1 point)* Écrire A sous la forme d'une matrice diagonale par blocs dont les éléments diagonaux sont identiques et notés M. Déterminer une expression des équations normales de ce problème en fonction de la matrice M.

[1] Exercices 1 à 3 sur une copie et exercices 4 à 6 sur une autre

3. *(0,5 point)* En déduire que la résolution de ce problème de moindres carrés est équivalente à la résolution de trois problèmes de moindres carrés plus simples dont les équations normales ne diffèrent que par leur membre droit.
4. *(1 point)* On suppose que l'on dispose des deux fonctions matlab suivantes :
   - `[LU info] = factorisation_lu(M)` qui fournit la décomposition LU « en place » de la matrice M
   - `x = descente_remontee(LU,b)` qui fournit la solution x de l'équation $Mx = b$ où LU est la décomposition LU « en place » de M.

   Ecrire une fonction Matlab `[u] = pmc(w,x,y,z,st,vg,vs)` qui calcule la solution du problème.

2. Arithmétique flottante

/ 3 points */*

On cherche à coder la fonction suivante :

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x - \sqrt{x}$$

1. *(0,5 point)* Quel problème rencontre-t-on avec l'algorithme « naturel » :

   $$\hat{y} = x \ominus sqrt(x)$$

   lorsque x est proche de 1 ?
2. *(2 points)* On suppose que la racine carrée $sqrt$ calculée en machine vérifie

   $$sqrt(x) = \sqrt{x}(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_m.$$

   Calculer l'erreur relative $\dfrac{|\hat{y} - y|}{|y|}$ entre le nombre machine $\hat{y}$ calculé par l'agorithme "naturel" et la valeur exacte $y = x - \sqrt{x}$. Déterminer le comportement de l'erreur relative lorsque x est proche de 1.
3. *(0,5 point)* Quelle réécriture de f proposez-vous pour corriger le problème rencontré ?

3. Systèmes linéaires

/ 3 points */*

1. *(1,5 point)* Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

   Déterminez les matrices L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure telles que

   $$A = LU \quad \text{et} \quad diag(L) = (\,1,\ 1,\ 1\,)$$
2. *(0,5 point)* En déduire que A est inversible.
3. *(1 point)* A partir de la décomposition précédente de A, calculez la solution du système $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Interpolation

/* *3,5 points* */

1. *(1 point)* On considère les points

$$(x_0,\ y_0) = (0,\ 1), \quad (x_1,\ y_1) = (2,\ 7), \quad (x_2,\ y_2) = (4,\ 29).$$

En expliquant la démarche suivie, déterminez le polynôme P de degré 2 écrit dans la base de Newton, tel que

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \quad P(x_i) = y_i$$

2. *(1 point)* Déterminez ce même polynôme dans la base de Lagrange.
3. *(1,5 point)* On souhaite calculer un polynôme Q tel que $\forall i \in \{0, 1, 2\}$, $Q(x_i) = P(x_i) = y_i$ et $Q(\alpha) = \beta$. Quelle méthode allez-vous utiliser ? Déterminez Q en fonction de P, α et β.

5. Classification

/* *2,5 points* */

1. *(0,5 point)* Citez un ou plusieurs intérêts de la classification (appuyez-vous éventuellement sur des exemples).
2. *(2 points)* Écrire un algorithme de classification basé sur celui des *H-means* tel que :
   - le changement de classe d'un point s'effectue uniquement si la classe à laquelle appartient ce point comporte au moins deux points
   - le changement de classe se fait en fonction du barycentre le plus proche (*i.e.* comme pour les *H-means*)
   - lorsqu'un point change de classe, on met immédiatement à jour les deux barycentres concernés

6. Inertie

/* *3 points* */

Soient $y \in \mathbb{R}^p$ et $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n points de $\mathbb{R}^p$ affectés de coefficients $\omega_1, \ldots, \omega_n$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive c'est-à-dire que

$$(\, Ax \mid x\,) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^p, x \neq 0.$$

Cette matrice A permet alors de définir une norme sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$\begin{array}{rccc} \|\,.\,\|_A \ : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{(\, Ax \mid x\,)} \end{array}$$

On appelle inertie de C par rapport à un point y et relativement à la norme $\|\,.\,\|_A$, la quantité :

$$I_C(y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \|\, x_i - y\,\|_A^2$$

Le but de cet exercice est de déterminer le point $\overline{y}$ réalisant le minimum de cette fonction.

1. *(0,5 point)* Soit $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Donnez une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que le minimum de F soit atteint en $\overline{y}$.
2. *(1,5 point)* Soit $f : y \in \mathbb{R}^p \mapsto \|\, x - y\,\|_A^2$ où x est un point fixé de $\mathbb{R}^p$. Calculez la dérivée directionnelle de f dans une direction quelconque d et en déduire $f'(y)$.
3. *(1 point)* Déduire de la question précédente la dérivée de I_C et montrez que le point réalisant le minimum de I_C est exactement le barycentre des points pondérés $(x_i, \omega_i)_{1\leq i\leq n}$. Vous admettrez qu'une matrice A symétrique définie positive est inversible.