Ecole Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine – 1ère année
Rédacteurs : Bruno Pinçon & Tony Bourdier
Date : Vendredi 27 avril 2007
Durée : 2 heures

Examen final – Mathématiques Numériques

Calculatrices, machines électroniques et ordinateurs portables **interdits**
Documents autorisés : une feuille A4 (recto et verso) manuscrite comportant uniquement des rappels de cours (*i.e.* exercices interdits) **à rendre** avec votre composition

Remarques : La clareté de la rédaction est un élément important de l'évaluation. Le barême est donné à titre indicatif. Cet énoncé est composé de plusieurs exercices indépendants. Il n'est pas demandé de traiter les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont présentés.

1. Moindres carrés classiques */* 3,5 points */*

(*a*) *(0.5 point)* Donner un ou plusieurs intérêts (pas la méthode) des moindres carrés.

(*b*) *(1 point)* On cherche à expliquer la note y obtenue par chaque étudiant à son examen de mathématiques numériques par le temps t qu'il a passé à travailler la matière et l'effort z qu'il prétend avoir fourni selon la relation suivante :

$$y = f(z,t) = t^{\alpha}\, z^{\beta}\, e^{\gamma}$$

où α, β et γ sont les paramètres à déterminer (et $e^{\gamma} = exp(\gamma)$). On dispose pour cela des données correspondantes pour n étudiants : $(y_i, z_i, t_i)_{1\le i\le n}$. Pour pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés, il faut que la relation soit linéaire en ses paramètres, ce qui s'obtient en travaillant sur $log(y)$ (logarithme népérien). Exprimer alors le problème sous forme standard :

$$\min_u ||\, A\,u - v\,||^2$$

en explicitant A, u et v.

(*c*) *(1 point)* Ecrire les équations normales du problème en fonction des quantités suivantes :

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} log(t_i),\;\; SC_t = \sum_{i=1}^{n} log^2(t_i),\;\; S_y = \sum_{i=1}^{n} log(y_i),\;\; S_z = \sum_{i=1}^{n} log(z_i),\;\; SC_z = \sum_{i=1}^{n} log^2(z_i),$$
$$S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} log(y_i) log(z_i),\quad S_{yt} = \sum_{i=1}^{n} log(y_i) log(t_i),\quad S_{zt} = \sum_{i=1}^{n} log(z_i) log(t_i)$$

(*d*) *(1 point)* On suppose que l'on dispose des deux fonctions matlab suivantes :
- `[LU info] = factorisation_lu(M)` qui fournit la décomposition LU "en place" de la matrice M
- `x = descente_remontee(LU,b)` qui fournit la solution x de l'équation $Mx = b$ où LU est la décomposition LU "en place" de M.

Ecrire une fonction Matlab `[alpha beta gamma] = pmc(y,z,t)` qui réalise ces calculs.

2. Arithmétique flottante /* 3 points */

On cherche à coder la fonction suivante :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} - y$$

On se propose de coder notre fonction en utilisant les nombres flottants IEEE double précision[1].

(a) *(1.5 point)* Quel problème rencontre-t-on avec l'algorithme direct lorsque x et y sont supérieurs à $2\ 10^{200}$? Réécrire f différemment pour contourner le problème.

(b) *(1.5 point)* Quel problème rencontre-t-on avec l'algorithme direct lorsque x est proche de 0 ? Réécrire f différemment pour contourner ce nouveau problème[2].

3. Interpolation de Newton /* 3 points */

(a) Soient $n + 1$ réels deux à deux distincts $(x_i)_{0 \le i \le n}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le polynôme d'interpolation p_n de f pour les points $x_0, ..., x_n$.

(0,25 point) Montrer que :

$$f[x_0] = \frac{det(f(x_0))}{det(1)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}}$$

On admet que

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}}$$

et on appelle a_i les coefficients de p_n exprimés dans la base canonique.

(b) *(0,5 point)* Pour $i \in [0, n]$, exprimez $f(x_i)$ en fonction des a_i et des x_i.

(c) *(0.75 point)* En déduire que le problème d'interpolation se ramène à la résolution d'un système linéaire $Ay = b$ où A, y et b sont à expliciter.

On sait que pour tout i, la i^e composante y_i de y dans l'équation $Ay = b$ vérifie :

$$y_i = \frac{det(\tilde{A})}{det(A)}$$

où $\tilde{A}$ est la matrice A dont la i^e colonne a été remplacée par b.

[1]

IEEE double précision	$\mathcal{F}(2, 53, -1022, 1023)$
ε_m	$1,11.10^{-16}$
m	$2,225.10^{-308}$
M	$1,798.10^{308}$

[2] Faire apparaître $\sqrt{x^2 + y^2} + y$

(*d*) *(0.5 point)* En déduire une généralisation de la question 1 (*i.e.* une expression de $f[x_0, x_1, ..., x_n]$)

(*e*) *(1 point)* En déduire une expression du polynôme d'interpolation dans la base de Newton associé aux points $P_0 = (-2, 1)$, $P_1 = (0, -3)$ et $P_2 = (3, 6)$.

4. Système linéaire

/ 3 points */*

On cherche $x \in \mathbb{R}^3$ solution du système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(*a*) *(2 points)* Effectuer une décomposition[3] LU sur la matrice A.

(*b*) *(1 point)* Utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire.

5. Moindres carrés dynamiques

/ 7 points */*

Partie 1

Soit une matrice réelle (n, n) symétrique et définie positive A. On suppose que l'on connaît l'inverse A^{-1} de A. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, on considère la matrice $B = A + uu^\top$. Le but de cette partie est d'apprendre une formule "rapide" permettant de déduire l'inverse de B à partir de l'inverse (connu donc) de A.

(*a*) Montrer que la matrice B est symétrique et définie positive (et donc inversible).

(*b*) On note $A^{-\top}$ l'inverse de $A^\top$ [4] Vérifier que[5] :

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uu^\top A^{-\top}}{1 + u^\top A^{-1}u}$$

On a donc $B^{-1} = A^{-1} - $ *correction*.

(*c*) On note $y = A^{-1}u$. On rappelle que $(CD)^\top = D^\top C^\top$. Montrer que le terme de correction se réécrit :

$$\frac{yy^\top}{1 + u^\top y} = \left(\frac{y}{1 + u^\top y}\right) y^\top$$

et, en utilisant l'expression de droite (cad le "bon" parenthésage), en déduire le nombre d'opérations pour calculer l'inverse de B connaissant déjà l'inverse de A (rmq : ne pas oublier le coût du produit $A^{-1}u$).

Partie 2

On considère un problème de moindres carrés usuel : modèle linéaire avec n paramètres, fonction du temps $(f(t[, x]) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \cdots + x_n\phi_n(t))$. $m (\geq n)$ mesures ont été effectuées, la matrice M correspondante $(M_{i,j} = \phi_j(t_i))$ étant de rang maximal (cad de rang n). On note y le vecteur de $\mathbb{R}^m$ des mesures (les instants de mesure étant notés t_i). On note aussi x la solution de ce problème. Question

[3] Sans échange d'équation

[4] ceci est en fait une convention d'écriture car A étant symétrique, A^{-1} l'est aussi et donc $A^{-\top} = A^{-1}$.

[5] Aide : (i) bien comprendre les dimensions (en particulier si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et M une matrice (n, n), $x^\top Ay$ est un scalaire), (ii) on rappelle que $\alpha M_1 M_2 = M_1 \alpha M_2 = M_1 M_2 \alpha$ si α est un scalaire, ce scalaire pouvant être une expression du type $x^\top Ay$.

préliminaire : rappeler les équations normales vérifiées par x. On suppose que l'on a calculé x mais aussi l'inverse de la matrice du système linéaire dont x est solution. Maintenant des mesures supplémentaires arrivent à des instants $t_{m+1}, t_{m+2}, \dots$ et l'on souhaite affiner "rapidement" notre estimation des paramètres à chaque fois qu'une nouvelle mesure est connue. Pour simplifier on considère pour le moment une seule mesure supplémentaire à l'instant t_{m+1} que l'on note z (au lieu de y_{m+1}) pour alléger les notations). On note aussi l le vecteur ligne $[\phi_1(t_{m+1}), \dots, \phi_n(t_{m+1})]$ et x_c la nouvelle solution (intégrant les m+1 mesures donc). Finalement on rappelle que la formule suivante (produit matriciel par bloc) :

$$\left[\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} E \\ \hline F \end{array}\right] = CE + DF$$

fonctionne pourvu que les dimensions des blocs soient compatibles (cad C de format (m, n_1), D de format (m, n_2), E de format (n_1, p) et F de format (n_2, p)).

(a) Montrer que la nouvelle matrice des moindres carrées et le nouveau vecteur des mesures s'écrivent, respectivement :

$$\left[\begin{array}{c} M \\ \hline l \end{array}\right], \text{ et } \left[\begin{array}{c} y \\ \hline z \end{array}\right]$$

(b) A l'aide de la formule du produit par blocs, en déduire que x_c est la solution du système linéaire

$$(M^\top M + l^\top l) x_c = M^\top y + l^\top z$$

Pourquoi la matrice $M^\top M + l^\top l$ est-elle inversible ?

(c) Finalement en déduire que :

$$x_c = x + K(z - lx)$$

avec $K = (M^\top M + l^\top l)^{-1} l^\top$ (appelée matrice de gain). Dans quel cas n'y a t-il pas de correction et quelle interprétation en donnez vous ?

(d) En utilisant la partie 1 expliquer comment obtenir rapidement la nouvelle solution x_c.

6. Classification

/ 1,5 point */*

(a) *(0,5 point)* Expliquez l'intérêt (pas la méthode) de la classification en vous appuyant éventuellement sur un exemple.

(b) *(1 point)* Expliquez précisément, en vous aidant éventuellement d'un schéma, l'algorithme des H-means. Cet algorithme converge-t-il vers un optimum global ?