Algèbre de Boole
Fonctions booléennes

F. Alexandre

École Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine

September 30, 2008

Plan

- Généralités
- Ecriture automatique des fonctions booléennes
- Composition et parties génératrices
- Simplification des fonctions booléennes

Références : Pierre MARCHAND, Mathématiques Discrètes, Dunod

Introduction

Phénomène à deux états :

- en mathématiques : pour un nombre entier être *pair* ou *impair*, pour un nombre réel être *positif* ou *négatif*
- en logique : pour une proposition être *vraie* ou *fausse*
- en informatique : pour un bit être à 0 ou à 1, pour une expression conditionnelle (booléenne) être *true* ou *false*
- dans la vie courante : pour une porte être ouverte ou fermée, pour un étudiant être reçu ou recalé, ...

Domaines d'application :

algorithmique, structure des ordinateurs, électronique, automatique,...

Définitions

- $\mathbb{B} = \{0,\ 1\}$: l'ensemble des booléens
- $\mathbb{B}^n$: l'ensemble des n-uplets de booléens ($n \in \mathbb{N}$)
- $card(\mathbb{B}^n) = 2^n$

Definition

Une fonction booléenne f à n variables est une application de $\mathbb{B}^n$ vers $\mathbb{B}$,
$f\ :\ \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$

- $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonctions booléennes à n variables. $card(\mathbb{F}_n) = 2^{2^n}$
- $\mathbb{F}$ est l'ensemble des fonctions booléennes, $\mathbb{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_i$

Vue technologique

Fonction booléenne de $\mathbb{F}_n$: boîte noire à n entrées et une sortie.

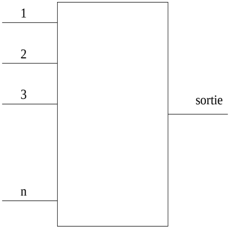


Figure: Fonction booléenne de $\mathbb{F}_n$

Fonctions booléennes à deux variables

16 (2^{2^2}) fonctions booléennes à deux variables :

0	0	1
0	0	0
1	0	0

1	0	1
0	1	1
1	1	1

x_1	0	1
0	0	0
1	1	1

x_2	0	1
0	0	1
1	0	1

$\overline{x_1}$	0	1
0	1	1
1	0	0

$\overline{x_2}$	0	1
0	1	0
1	1	0

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

NOR	0	1
0	1	0
1	0	0

NAND	0	1
0	1	1
1	1	0

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

$\nRightarrow$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\nLeftarrow$	0	1
0	0	1
1	0	0

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\nLeftrightarrow$	0	1
0	0	1
1	1	0

Remarques

- **0** et **1** sont les fonctions constantes
- x_1 et x_2 sont respectivement les première et seconde projections, $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ sont les négations des projections
- $+$ est l'addition booléenne ou le **ou** (**or**) logique ou l'union ensembliste
- $\times$ est la multiplication booléenne ou le **et** (**and**) logique noté aussi **.** ou sans signe
- **NOR** et **NAND** sont respectivement les négations de $+$ et $\times$
- **attention** à la définition de $\Rightarrow$, $x_1 \Rightarrow x_2$ s'écrit aussi $\overline{x_1} + x_2$
- $\Leftrightarrow$ est l'équivalence logique
- $\not\Leftrightarrow$ est la négation de l'équivalence logique, noté aussi $\oplus$ (**xor**), c'est la somme "modulo 2" (dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)
- $x_1 \not\Rightarrow x_2$ s'écrit $x_1\overline{x_2}$ et se lit x_1 sauf x_2 (utilisé en informatique documentaire)

Propriétés des fonctions usuelles

- $\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0, \quad \overline{\overline{x}} = x$
- $0 + x = x + 0 = x, \quad 1 + x = x + 1 = 1, \quad 0x = x0 = 0, \quad 1x = x1 = x$
- $x + x = x, \quad xx = x, \quad x + y = y + x, \quad xy = yx$ (commutativité de + et .)
- $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ (associativité de + et .)
- $x + \overline{x} = 1, \quad x\overline{x} = 0$
- Loi de De Morgan : $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}, \quad \overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$
- $x(y + z) = xy + xz, \quad x + yz = (x + y)(x + z)$ (distributivité de . par rapport à + et de + par rapport à .)
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{B}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \oplus, \times)$ est un corps.

Autres fonctions

- Il y a 256 fonctions booléennes à 3 variables. Exemples :
  $\phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$
  $C(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1x_2 + \overline{x_1}x_3$
- Fonctions à n variables issues des fonctions à une ou deux variables.
  - Les fonctions projections
    $p(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i$
    notée $x_{i,n}$ ou x_i lorsqu'il n'y a pas de confusion
  - Les négations des projections
    $\overline{p}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \overline{x_i}$
    on les note $\overline{x_{i,n}}$ ou $\overline{x_i}$
  - Somme booléenne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_i + \ldots + x_n$
  - Produit booléen : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \ldots x_i \ldots x_n$
  - Généralisation des fonctions *Nor*, *Nand*, $\bigoplus$

Fonctions monômes

Definition

i)Un monôme conjonctif est une fonction booléenne obtenue par produit de fonctions projections ou de négations de projections (une fonction et sa projection ne pouvant être présente dans un monôme, i.e. 0 n'est pas un monôme conjonctif)
ii) Un monôme disjonctif est une fonction booléenne obtenue par somme de projections et de négations de projections (une projection et sa négation ne pouvant être présente dans un monôme, i.e. 1 n'est pas un monôme disjonctif)
iii) Un monôme (conjonctif ou disjonctif) à n variables est dit canonique si toutes les variables de 1 à n interviennent dans l'écriture du monôme

Example

- monômes conjonctifs : $x_2\overline{x_3}x_5\overline{x_8}$, $x_3x_4\overline{x_5}$ $\overline{x_6}x_8$
- monôme disjonctif : $x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_5} + x_6$
- monôme conjonctif canonique : $x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5x_6$ est un monôme canonique de F_6 (à 6 variables), mais n'est pas un monôme canonique de F_7
- monôme disjonctif canonique de F_5 : $\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + x_4 + \overline{x_5}$

Support d'une fonction booléenne

Definition

Soit f fonction booléenne à n variables, le support de f, $S_n(f) = \{\epsilon\ ;\ \epsilon \in \mathbb{B}^n \textit{ et } f(\epsilon) = 1\}$, (i.e. l'ensemble des n-uplets pour lesquels f vaut 1). On note $S(f)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion.

Exemple(support)

Dans F_2, $S_2(+) = \{(1,1),\ (1,0),\ (0,1)\}$, $S_2(\times) = \{(1,1)\}$.
Dans F_3, $S_3(x_2) = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,1,0)\}$.
Dans F_3, $S_3(x_1\overline{x_3}) = \{(1,1,0),\ (1,0,0)\}$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions de F_n, on a
$S_n(f+g) = S_n(f) \cup S_n(g)$,
$S_n(f.g) = S_n(f) \cap S_n(g)$
$S_n(\overline{f}) = \overline{S_n(f)}$

Théorème de Lagrange

Théorème de Lagrange (première forme)

Soit $f \in F_n$, f s'écrit de manière unique (à l'ordre près des termes de la somme) comme somme de monômes conjonctifs canoniques sous la forme suivante :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S_n(f)} x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n} = \sum_{\epsilon \in S_n(f)} x^{\epsilon} = \sum_{\epsilon \in \mathbb{B}^n} f(\epsilon) x^{\epsilon}$$

Avec $x_i^{\epsilon_i} \; = \; \textit{si } \epsilon_i = 1 \;\; \textit{alors} \;\; x_i \;\; \textit{sinon} \;\; \overline{x_i}$
et $x^{\epsilon} = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$.
C'est la forme normale de Lagrange disjonctive conjonctive de la fonction f (disjonction de monômes conjonctifs)

Exemples

$S_2(+) = \{(1,1),\ (1,0),\ (0,1)\}$, $x_1 + x_2 = x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

$S_2(\oplus) = \{(1,0),\ (0,1)\}$, $\quad x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

$S_2(\Rightarrow) = \{(1,1),\ (0,1),\ (0,0)\}$, $\quad x_1 \Rightarrow x_2 \; = \; x_1x_2 + \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}.\overline{x_2}$

Théorème de Lagrange (suite)

Théorème de Lagrange (deuxième forme)

Soit $f \in F_n$, f s'écrit de manière unique (à l'ordre près des termes de la somme) comme produit de monômes disjonctifs canoniques sous la forme suivante :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \overline{S_n(f)}} (x_1^{\overline{\epsilon_1}} + x_2^{\overline{\epsilon_2}} + \ldots + x_n^{\overline{\epsilon_n}})$$

C'est la forme normale de Lagrange conjonctive disjonctive de la fonction f (conjonction de monômes disjonctifs)

Exemples

$S_2(+) = \{(1,1),\ (1,0),\ (0,1)\}$, $\overline{S_2(+)} = \{(0,0)\}$, $x_1 + x_2 = x_1 + x_2$

$S_2(\times) = \{(1,1)\}$, $\overline{S_2(\times)} = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0)\}$, $x_1 x_2 = (x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_2)$

$S_2(\oplus) = \{(1,0),\ (0,1)\}$, $\overline{S_2(\oplus)} = \{(0,0),\ (1,1)\}$ $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})$

Fonction duale d'une fonction booléenne

Definition (Fonction duale)

Soit f une fonction booléenne de F_n, la fonction duale de f, notée f^* est la fonction booléenne à n variables définies par :
$f^*(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots, \overline{x_n})$
Remarque : $\forall f \in \mathbb{F} \quad (f^*)^* = f$ (la dualité est involutive)

Exemples

La fonction duale de $\mathbf{0}$ est $\mathbf{1}$
La fonction duale de $+$ est $\times$
La fonction duale de *Nor* est *Nand*
La fonction duale de $\Leftrightarrow$ est $\oplus$

Definition (Fonction autoduale)

Une fonction f est autoduale si et seulement si $f^* = f$ (f est sa propre duale)
Remarques : Les fonctions projections sont autoduales. Les négations des projections sont aussi autoduales.

Fonctions booléennes croissantes

Definition (Relation d'ordre sur $\mathbb{B}$)

$\leq$ définie sur $\mathbb{B}$ par $0 \leq 0,\ \ 0 \leq 1,\ \ 1 \leq 1$ est une relation d'ordre définie sur $\mathbb{B}$.

Definition (Relation d'ordre sur $\mathbb{B}^n$)

$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_n) \leq (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_i, \ldots, \epsilon'_n)$ *ssi* $\epsilon_1 \leq \epsilon'_1$ *et* $\ldots\ \epsilon_i \leq \epsilon'_i \ldots$ *et* $\epsilon_n \leq \epsilon'_n$

Definition (Fonction booléenne croissante)

$f \in F_n$ est croissante **si et seulement si** $\forall \epsilon, \epsilon' \in \mathbb{B}^n \quad \epsilon \leq \epsilon' \ \Rightarrow\ f(\epsilon) \leq f(\epsilon')$

Exemples et contre-exemples

$+$ est croissante :

$$
\begin{tikzcd}
\overset{1}{(0,1)} \arrow[r] & \overset{1}{(1,1)} \\
\underset{0}{(0,0)} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \underset{1}{(1,0)} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ n'est pas croissante, car par exemple : $(0,0) \leq (1,0)$ et $0 \Rightarrow 0 = 1$, $1 \Rightarrow 0 = 0$ et $1 \nleq 0$

Composition des fonctions booléennes

Definition (Principe de composition)

Soient $f \in \mathbb{F}_n$ et $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}_m$, on note $f(g_1, \ldots, g_n)$ booléenne d'arité m (i.e. de $\mathbb{F}_m$) définie par :

$$f(g_1, \ldots, g_n) \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^n & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)) \end{array}$$

Definition (Partie générée)

Soit $E \subseteq \mathbb{F}$. On définit l'ensemble des fonctions obtenues par composition à partir de l'ensemble E, noté $comp(E)$, comme étant l'ensemble défini inductivement par :

- base : $B = E \cup \{(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i, i = 1, \ldots, n \text{ et } n \geq 1\}$
- induction : la seule opération est la composition des fonctions booléennes, càd que si $f \in comp(E)$ d'arité n et $g_1, \ldots, g_n \in comp(E)$ d'arité m alors $f(g_1, \ldots, g_n) \in comp(E)$

Remarques

- $comp(E)$ est le plus petit ensemble contenant E et les projections et stable par composition.
- De cette définition par induction découle un principe d'induction sur $comp(E)$. Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout élément de $comp(E)$, on montre que cette propriété est vraie pour tous les éléments de E et toutes les projections et qu'elle est stable par composition.

Parties génératrices

Definition

Soit $E \subseteq \mathbb{F}$,
i) E est une partie génératrice ssi $comp(E) = \mathbb{F}$
ii) E est une partie génératrice minimale si c'est une partie génératrice et si aucune de ses parties propres n'est génératrice.

Parties génératrices

$\{+,\ \times, ^{-}\}$ est une partie génératrice, (voir formes de Lagrange)
mais n'est pas génératrice minimale, $\{+,\ ^{-}\}$ et $\{\times, ^{-}\}$ sont deux parties génératrices minimales (à montrer en TD)

Fonction booléenne linéaire

Definition (Fonction linéaire)

Soit $f \in F_n$, on dit que f est **linéaire** si $f \in Comp(\{0, 1, \oplus\})$.

Remarque

Le terme linéaire vient du fait que toute fonction linéaire s'exprime comme somme exclusive ($\oplus$) de monômes de degré 0 ou 1 : 0, 1, x, x_1, x_2, ...

Example

- $x_1 \Leftrightarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$, donc $\Leftrightarrow$ est linéaire.
- $x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$, donc $+$ n'est pas linéaire à cause du monôme x_1x_2.
- $\overline{x} = 1 \oplus x$, donc $^{-}$ est linéaire.
- x_1 $NAND$ $x_2 = 1 \oplus x_1x_2$, donc $NAND$ n'est pas linéaire à cause du monôme x_1x_2.

Caractérisation des parties génératrices

Théorème

Soient les 5 propriétés suivantes :

$$\begin{cases} P_1(f) & \Leftrightarrow & f(0,\ldots,0)=0 \\ P_2(f) & \Leftrightarrow & f(1,\ldots,1)=1 \\ P_3(f) & \Leftrightarrow & f=f^* \quad (f \ \textit{autoduale}) \\ P_4(f) & \Leftrightarrow & f \text{ croissante} \\ P_5(f) & \Leftrightarrow & f \in comp(\{0,1,\oplus\}) \quad (f \ \textit{linéaire}) \end{cases}$$

Ces cinq propriétés sont **stables par composition**, autrement dit, pour tout $k = 1, 2 \ldots, 5$:
$P_k(f_1), \ldots, P_k(f_n) \quad \Rightarrow \quad \forall f \in comp(\{f_1, \ldots, f_n\}),\ P_k(f)$

Théorème

On considère les cinq propriétés $P_1, \ldots, P_5$ du théorème précédent. Une partie $E = \{f_1, \ldots, f_n\}$ est génératrice ssi pour chaque propriété P_i, il existe au moins un élément de E qui ne vérifie pas P_i :

$$comp(E) = \mathbb{F} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, \exists f \in E, \neg P_k(f)$$

où $\neg P_k(f)$ signifie "f ne vérifie pas la propriété P_k"

Mise en œuvre du théorème

Montrer que $comp(\{1, \ \times, \ \oplus\}) = \mathbb{F}$.
On considère les propriétés $\neg P_i$ ($i \in [1,5]$) du théorème précédent.

	1	$\times$	$\oplus$
$\neg P_1$	$*$		
$\neg P_2$			$*$
$\neg P_3$	$*$	$*$	$*$
$\neg P_4$			$*$
$\neg P_5$		$*$	

L'étoile $*$ dans la case correspondante signifie que la fonction vérifie $\neg P_i$.
On montre que :

1. 1 ne vérifie pas P_1.
2. $\oplus$ ne vérifie pas P_2 car $1 \oplus 1 = 0 \neq 1$.
3. $\times$ n'est pas autoduale car la duale de $\times$ est $+$. (1 et $\oplus$ ne sont pas autoduales non plus).
4. $\oplus$ n'est pas croissante car $(0,1) \leq (1,1)$ et $0 \oplus 1 = 1 \not\leq 1 \oplus 1 = 0$.
5. $\times$ n'est pas linéaire, car $x_1 \times x_2 = x_1 x_2$.

Problèmatique

On considère une fonction booléenne f, on se propose d'écrire f sous forme de somme de monômes disjonctifs de façon à ce que le nombre de monômes soient minimal et la longueur de chaque monôme minimale.

Exemple : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + \overline{x_1}x_3 + x_2\overline{x_3}$
se simplifie en $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$

Ordre sur $\mathbb{F}_n$

Definition (Ordre partiel sur $\mathbb{F}_n$)

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{F}_n$ par : $f \leq q$ ssi $S_n(f) \subseteq S_n(g)$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{F}_n$

Propriétés

- F_n admet 1 comme plus grand élément et 0 comme plus petit élément.
- $+$ et $.$ sont compatibles avec $\leq$ (i.e. $f \leq g$ *et* $f' \leq g' \;\Rightarrow f + f' \leq g + g'$ *et* $ff' \leq gg'$)
- $f \leq g \Rightarrow \overline{g} \leq \overline{f}$
- On a les équivalences suivantes : $S_n(f) \subseteq S_n(g) \Leftrightarrow f \leq g \Leftrightarrow f + g = g \Leftrightarrow f \times g = f \Leftrightarrow f \Rightarrow g \equiv 1 \Leftrightarrow (\exists h)\ (f + h = g)$

Proposition (Monômes disjonctifs)

Soient m_1 et m_2 deux monômes disjonctifs de $\mathbb{F}_n$ alors : $m_1 \leq m_2$ ssi $(\exists m_3)$ (m_3 *monome conjonctif de* $\mathbb{F}_n$ *et* $m_1 = m_2 m_3$)

Remarques

- Les plus grands monômes conjonctifs ont les écritures les plus petites.
- 1 est le plus grand monôme disjonctif de $\mathbb{F}_n$, ensuite viennent les projections et leur négation càd x_1, ..., x_n, $\overline{x_1}$,...,$\overline{x_n}$.
- Les plus petits monômes disjonctifs de $\mathbb{F}_n$ sont les monômes disjonctifs canoniques.

Fonction booléenne et somme des monômes maximaux

Definition

Soit $f \in \mathbb{F}_n$ et m un monôme conjonctif de $\mathbb{F}_n$ on dit que m est maximal pour f ssi
$m \leq f$ et $(\forall m')$ $(m'$ *monome conjonctif de* $\mathbb{F}_n$ *et* $m \leq m' \leq f \;\Rightarrow m' = m)$

Théorème

Soient $f \in \mathbb{F}_n$ et $M(f)$ l'ensemble des monômes maximaux de f.

1. soit m un monôme conjonctif de $\mathbb{F}_n$, on a
$m \leq f \Rightarrow (\exists m' \in M(f))\ (m \leq m' \leq f)$
2. Soit $f \in \mathbb{F}_n$ et $M(f)$ l'ensemble des monômes maximaux de f, on a : $f = \sum_{m \in M(f)} m$

Démonstration

1. Si m est maximal, il suffit de choisir $m' = m$, sinon d'après la définition de la maximalité d'un monôme, il existe m_1 tel que $m < m_1 \leq f$ et l'on peut recommencer le même raisonnement avec m_1, comme l'ensemble des monômes est fini, cette itération s'arrête, le dernier monôme trouvé est donc maximal.
2. D'après la première forme de Lagrange
$f(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S_n(f)} x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n}$

   or chaque monôme de la somme est inférieur ou égal à f, $x_1^{\epsilon_1} \ldots x_n^{\epsilon^n} \leq f$

   en appliquant le résultat 1. : $(\exists m' \in M(f))\ (x_1^{\epsilon_1} \ldots x_n^{\epsilon^n} \leq m' \leq f)$

   d'où
$$f = \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S_n(f)} x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \ldots x_n^{\epsilon_n} \leq \sum_{m' \in M(f)} m' \leq f$$

   d'où $f = \displaystyle\sum_{m' \in M(f)} m'$

Monômes centraux

Definition (Monôme central)

Soient $f \in \mathbb{F}_n$ et $M(f)$ l'ensemble des monômes maximaux de f, $m \in M(f)$ est un monôme central si et seulement si m n'est pas majoré par la somme des autres monômes maximaux de $M(f)$. On note $C(f)$ l'ensemble des monômes centraux de f.

$$m \in C(f) \Leftrightarrow m \in M(f) \text{ et } m \not\leq \sum_{m' \in M(f) \setminus \{m\}} m'$$

Proposition

$f \in \mathbb{F}_n$ et $E \subseteq M(f)$ si $f = \sum_{m \in E} m$ alors $C(f) \subseteq E$.
Cette proposition signifie que les monômes centraux sont indispensables dans l'écriture de f.

Représentation graphique des supports : diagramme de Karnaugh

Pour les éléments de $\mathbb{F}_2$

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2		
$\overline{x_2}$		

Il y a 4 monômes conjonctifs canoniques : x_1x_2, $x_1\overline{x_2}$, $\overline{x_1}x_2$, $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ représentés par les 4 cases.

Exemple d'utilisation : représentation de la fonction :
$(x_1, x_2) \mapsto x_1 + \overline{x_2}$,
on place des "1" dans les cases correspondant aux monômes x_1 et $\overline{x_2}$.
On obtient le diagramme suivant :

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	1	0
$\overline{x_2}$	1	1

Représentation graphique des supports : diagramme de Karnaugh

Pour les éléments de $\mathbb{F}_3$

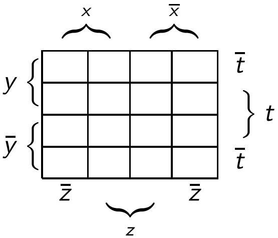
	x_1		$\overline{x_1}$	
x_2				
$\overline{x_2}$				
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

Il a 8 cases correspondant au 8 monômes disjonctifs canoniques de $\mathbb{F}_3$.
Exemple d'utilisation : représentation de la fonction
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2 x_3 + \overline{x_2} x_3 + \overline{x_3}$

	x_1		$\overline{x_1}$	
x_2	1	1	0	1
$\overline{x_2}$	1	1	1	1
	$\overline{x_3}$	x_3		$\overline{x_3}$

Représentation graphique des supports : diagramme de Karnaugh

Pour les éléments de $\mathbb{F}_4$.
Il faut un diagramme comportant $2^4 = 16$ cases correspondant aux 16 monômes conjonctifs canoniques de $\mathbb{F}_4$.



Méthode de Karnaugh

Méthode graphique pour les fonctions de $\mathbb{F}_n$ avec $n = 3, 4$ (voire 5).

Description de la méthode de Karnaugh

1. Reporter dans les diagrammes de Karnaugh le support de la fonction à simplifier.
2. Déterminer l'ensemble des monômes maximaux $M(f)$ et l'ensemble des monômes centraux $C(f)$.
3. Ecrire la fonction f comme somme de ses monômes centraux en complétant si besoin est avec d'autres monômes maximaux, de façon à ce que tout le support de f soit recouvert.

Example

Au tableau ou à faire à la maison : simplifier
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}x_3x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}x_3x_4$

Dans ce cas on trouve une seule forme simplifiée :
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_4 + \overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2x_3}$

Simplification des fonctions incomplétement spécifiées

Problème : soit $f, g \in \mathbb{F}_n$, on cherche les fonctions h aussi simples que possibles telles que :

$$f \leq h \leq g$$

1. On calcule $M(g)$, l'ensemble des monômes maximaux de g
2. On calcule le sous-ensemble $D(f, g)$ des monômes de $M(g)$ dont les supports n'ont pas une intersection vide avec $S(f)$, $D(f, g) = \{m; m \in M(g) \text{ et } S(m) \cap S(f) \neq \emptyset\}$
3. On calcule $C(f, g)$ le sous-ensemble de $D(f, g)$ des monômes dont les supports sont seuls à recouvrir un point du support de f.
   $C(f, g) = \{m; m \in D(f, g) \text{ et } (\exists \epsilon \in \mathbb{B}^n)\ (m(\epsilon) = 1 \text{ et } f(\epsilon) = 1\ (\forall m' \in D(f, g))\ (m' \neq m \Rightarrow m'(\epsilon) = 0)\}$
4. Pour coder les supports des fonctions f et g dans les diagrammes de Karnaugh, on utilise les conventions suivantes : les 1 pour le support de f, des $*$ pour les points du support de g qui ne sont pas dans le support de f, des 0 pour les points qui ne sont pas dans le support de g.
5. Pour obtenir une fonction h "simple", il suffit prendre l'ensemble $C(f, g)$ que l'on peut compléter avec des monômes de $D(f, g)$ (on obtient en général plusieurs fonctions h que l'on peut sélectionner selon certains critères).

Autre méthode : la méthode de Quine

La méthode de Karnaugh est limitée aux fonctions à 4 ou 5 variables, la méthode de Quine est une méthode plus puissante, que l'on peut implanter. (voir : Pierre Marchand, Mathématiques Discrètes Dunod).