ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Logique du premier ordre : sémantique, interprétation, interprétation d'une formule, modèle, théorème

Exercice 1

En utilisant les constantes s pour Serge, t pour Tobby et les symboles de relation $a(x, y)$: "x aime y", $c(x)$: "x est un chien", $d(x)$: "x est un animal domestique", $e(x)$: "x est un enfant" et $o(x)$: "x est un oiseau", formaliser les énoncés suivants :

1. Les chiens et les oiseaux sont des animaux domestiques
2. Tobby est un chien qui aime les enfants
3. Les oiseaux n'aiment pas les chiens
4. Serge aime tous les animaux domestiques sauf les chiens
5. Certains chiens aiment les enfants

Exercice 2

Sémantique d'une formule close. Soit le langage $\mathcal{L} = (X,\ F,\ R)$ de la logique du premier ordre défini par $X = \{x,\ y,\ z\}$, un ensemble de variables, $F = \{a,\ f\}$, un ensemble de symboles fonctionnels tels que $arité(a) = 0$ et $arité(f) = 1$, et $R = \{p,\ q,\ r,\ s\}$, un ensemble de symboles relationnels tels que $arité(p) = arité(q) = arité(r) = 1$ et $arité(s) = 2$.

On définit l'interprétation I de la façon suivante :

- $|I| = \{0,\ 1,\ 2\}$ est le domaine de I,
- le symbole de constante a est interprété par $I(a) = 0$.
  $I(f)$, l'interprétation du symbole fonctionnel f, est une application de $|I|$ vers $|I|$ telle que :
  $$I(f) = \begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to 0 \\ 2 \to 2 \end{cases}$$
- l'interprétation d'un symbole relationnel est définie ici par la donnée de l'ensemble des éléments vérifiant la relation.
  p est interprété par $I(p) = \{0,\ 1\}$ (cela signifie que $I(p)(0) = 1$, $I(p)(1) = 1$ et $I(p)(2) = 0$).
  q, r et s sont interprétés par $I(q) = \{1,\ 2\}$, $I(r) = \emptyset$ et $I(s) = \{(0, 1),\ (0, 2),\ (1, 2)\}$.

Pour chacune des formules suivantes, déterminer la valeur sémantique dans l'interprétation I et en déduire si oui ou non I est un modèle la formule.

(1) $\exists x\ r(x)$	(2) $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$	(3) $\forall x\ (p(x) \vee q(x))$
(4) $\forall x\ (r(x) \Rightarrow q(x))$	(5) $f(f(a)) = a$	(6) $f(f(f(a))) = a$
(7) $\forall x\ (s(x, f(x)) \vee (f(x) = x))$	(8) $(\forall x\ p(x)) \Rightarrow (\exists x\ p(x))$	(9) $(\exists x\ p(x)) \Rightarrow (\forall x\ p(x))$

Exercice 3

Sémantique d'une formule comportant des variables libres. Soit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = (V,\ F,\ R)$ où $V = \{x,\ y,\ \ldots\}$, $F = \emptyset$ et $R = \{r,\ s\}$ tels que $arité(r) = 1$ et $arité(s) = 2$.

On considère l'interprétation I telle que $E = |I| = \{n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ et\ n \geq 2\}$, $I(r)$ est le prédicat "est premier" et $I(s)$ est le prédicat "divise". Déterminer les variables libres de chacune des formules suivantes et donner sa sémantique dans l'interprétation I.

1. $\forall y\ [s(y, x) \Rightarrow y = x]$
2. $\forall y\ [s(y, x) \wedge \neg(x = y) \Rightarrow r(y)]$
3. $\forall y \forall z\ [r(y) \wedge r(z) \wedge s(y,\ x) \wedge s(z,\ x) \Rightarrow y = z]$
4. $\forall y \forall z\ [s(y,\ x) \wedge s(z,\ x) \Rightarrow s(y,\ z) \vee s(z,\ y)]$
5. $\forall y \exists z \exists t\ [\neg r(y) \wedge s(y,\ x) \Rightarrow r(z) \wedge r(t) \wedge z \neq t \wedge s(z,\ y) \wedge s(t,\ y)]$
   Remarque : $x \neq y$ est une abréviation de $\neg(x = y)$

Exercice 4

Caractériser par le cardinal de leur domaine, les interprétations qui sont des modèles des formules (ou des ensembles de formules) suivantes :

1. $\forall x \forall y \; x = y$
2. $\exists x \exists y \; \neg(x = y)$
3. $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y \; [\bigvee_{1 \leq i \leq k} y = x_i]$
4. $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y \; [(\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq k} \neg(x_i = x_j)) \wedge (\bigvee_{1 \leq i \leq k} y = x_i)]$
5. $\forall x \; \neg r(x, x)$
   $\forall x \forall y \forall z \; r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z)$
   $\forall x \exists y \; r(x, y)$

TD6
MaD 1

Exercice 1 :

1) $\forall x \quad d[o(x) \wedge c(x)]$

$\forall x \quad c(x) \vee o(x) \Rightarrow d(x)$

$\forall x \quad (c(x) \Rightarrow d(x)) \wedge (o(x) \Rightarrow d(x))$

2) $c(t) \wedge \forall x \quad (e(x) \Rightarrow a(t,x))$.

3) $\forall x \forall y \quad (c(x) \wedge o(y) \Rightarrow \neg a(x,y))$

4) $\forall x \quad ((d(x) \wedge \neg c(x)) \Rightarrow a(s,x))$

5) $(\exists x) \quad (c(x) \wedge (\forall y) \quad (e(y) \Rightarrow a(x,y)))$

Exercice 2 :

$E = |I| = \{0,1,2\}$

(1) $([\exists x \; r(x)](I) \overset{?}{=} 1)$

$[\exists x \; r(x)](I) = 1$ ssi $\exists x$ de E tq $[r(x)](I)$
$I(r)(x) = 1$.

on a $I(1) = \emptyset$

$I(r)(x) = 0$ donc n'existe pas $x \in \{0,1,2\}$

tq $I(1)(x) = 1$ donc $[\exists x \; r(x)](I) = 0$

I n'est pas un modèle à cette formule

(2) $[\exists x \; (p(x) \wedge q(x))](I) \overset{?}{=} 1$

s'il existe $x \in E$ tq $I(p)(x) \wedge I(q)(x) = 1$.

$\left.\begin{array}{l} I(p) = \{0,1\} \\ I(q) = \{1,2\} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$

donc I modèle de la formule.

③ $[\forall x \ (p(x) \vee q(x))](I) \overset{?}{=} 1$

pour tous les $x \in |I| = E$: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

$\Rightarrow$ I modèle

④ $\underbrace{I(r)(x)}_{0} \Rightarrow I(q)(x) = 1$

donc toujours vrai, donc I modèle.

⑤ $[f(f(a)) = a](I) \overset{?}{=} 1$

$[f(f(a))](I) = [a](I)$

$\left.\begin{array}{l} [f(f(a))](I) = 0 \\ I(a) = 0 \end{array}\right\} [f(f(a))](I) = [a](I).$

I modèle

⑥ Idem

⑦ $\forall x \ (s(x, f(x)) \vee (f(x) = x))$

$I(s)(x, f(x)) \vee I(f)(x) = x$

$x = 0$, $x = 1$.

⑧ $(\forall x \ p(x)) \Rightarrow (\exists x \ p(x))$.

Exercice 3 :

(1) $[\underbrace{\forall y \ [s(y,x) \Rightarrow y = x]}_{\alpha_1}](I)$

$I(\alpha_1) = \forall y \ (y | x \Rightarrow y = x)$

la sémantique de α_1 est : $\{ f : f \in E^*, f(x) = n$, n est nb. premier $\}$.

(2) $[\underbrace{\forall y \ [s(y,x) \wedge \neg(x = y) \Rightarrow r(y)]}_{\alpha_2}](I)$

$I(\alpha_2) = \forall y \ [y$ divise $x \wedge x$ est diff de $y \Rightarrow y$ est premier$]$