ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Théorie des langages : grammaires algébriques et langages algébriques

Propriété de fermeture, lemme de pompage.

Exercice 1 Dans cet exercice on étudie la stabilité des langages réguliers et des langages algébriques.

1. Soient L_1, L_2 et L trois langages réguliers.
   (a) Que peut-on dire de $L_1 \cup L_2$? de $L_1 L_2$? de L^* ?
   (b) Montrer que $\overline{L}$ est un langage régulier. Indication : soit $\mathcal{A} = (A, Q, q_0, \delta, T)$ un automate déterministe reconnaissant le langage L, construire un automate $\overline{\mathcal{A}}$ reconnaissant $\overline{L}$.
   (c) Soient $\mathcal{A}_1 = (A, Q_1, q_0^1, \delta_1, T_1)$ et $\mathcal{A}_2 = (A, Q_2, q_0^2, \delta_2, T_2)$ deux automates finis déterministes reconnaissant respectivement L_1 et L_2, montrer que $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier en construisant un automate fini déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
   (d) Montrer que $\widetilde{L} = \{\tilde{\alpha},\ \alpha \in L\}$ est régulier ($\tilde{\alpha}$ est l'inverse (ou le mot miroir) de α).
2. Soient L_1 et L_2 deux langages algébriques définis respectivement par les grammaires $G_1 = (N_1, A_1, \rightarrow_1, X_1)$ et $G_2 = (N_2, A_2, \rightarrow_2, X_2)$, et tels que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.
   (a) Montrer que $L_1 \cup L_2$ est un langage algébrique.
   (b) Même question pour le langage $L_1 L_2$.
   (c) Même question pour le langage L_1^*.
   (d) Même question pour le langage $\widetilde{L_1}$.

   Les langages algébriques ne sont pas stables par intersection, ni par passage au complémentaire.
3. **Résultats.** Langages réguliers et langages algébriques.
   On peut démontrer que l'intersection d'un langage régulier et d'un langage algébrique est un langage algébrique. Dans [1], une méthode est décrite, qui étant donnés :
   – un langage régulier et un automate qui le reconnaît
   – un langage algébrique et une grammaire qui l'engendre
   construit une grammaire algébrique qui engendre l'intersection des deux langages.

Exercice 2 Nous avons rencontré quatre caractérisations des langages réguliers :

1. les langages obtenus à partir des langages finis par un nombre fini d'opérations d'**union**, de **concaténation** et de **fermeture itérative** (c'est la définition d'un langage régulier)
2. les langages dénotés par des expressions rationnelles
3. les langages reconnus par des automates finis (déterministes ou indéterministes)
4. les langages engendrés par des grammaires linéaires à droites

La contraposée du lemme suivant peut servir à montrer qu'un langage n'est pas régulier :

Théorème *(Lemme de l'étoile) Soient L un langage régulier infini et un automate fini comportant k états reconnaissant L. Soit α un mot de L tel que $|\alpha| \geq k$, alors $\exists x, u, y$ avec $u \neq \varepsilon$ et $|xu| \leq k$ tels que $\alpha = xuy$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(xu^n y \in L)$.*

Questions

1. Soit le langage $L_1 = \{a^n b^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, L_1 est-il régulier ?
2. Même question pour $L_2 = \{a^{n^2},\ n \in \mathbb{N}\}$.
3. Montrer que $L_3 = \{\alpha,\ \alpha \in \{a, b\}^* \textit{ et } |\alpha|_a = |\alpha|_b\}$ n'est pas régulier. Indications : répondre aux questions suivantes :
   (a) Montrer que L_3 est algébrique.
   (b) Montrer que $L_4 = a^* b^*$ est régulier.
   (c) Quel est le langage $L_3 \cap L_4$? en déduire le résultat.
4. Même question pour $L_5 = \{\alpha,\ \alpha \in \{a, b\}^* \textit{ et } \alpha = \tilde{\alpha}\}$.
5. Même question pour $L_6 = \{a^n,\ n \in \mathbb{N} \textit{ et } n \textit{ premier}\}$.
6. L'affirmation suivante est-elle vraie : “tout sous-ensemble d'un langage régulier est régulier” ?

[1] Pierre Marchand, Mathématiques Discrètes, Automates, langages, logique et décidabilité. Dunod