ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Algèbre de Boole : généralités

Exercice 1

On rappelle l'ordre de priorité des fonctions suivantes : $^{-} > \times > + > \oplus = \Rightarrow = \Leftrightarrow$.
Soient les fonctions de $\mathbb{F}_3$ suivantes :
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$
$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$.

1. Montrer que $f = g$ en complétant la table de vérité suivante :

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$x_1x_2 + x_3$	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_3$	$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

   Quelle propriété aurait permis de déduire directement l'égalité de f et de g ?

2. Déterminer $S_3(f)$ le support de f et en déduire la première forme normale de Lagrange de f.
3. Déterminer $\overline{S_3(f)}$ et en déduire la deuxième forme normale de Lagrange de f.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1x_2 + \overline{x_1}x_3$.

1. Dresser la table de vérité de f et trouver le nom de cette fonction par sa sémantique.
2. Déterminer le support de f et étudier sa croissance.
3. Montrer que $(\forall g \in \mathbb{F}_n)\ g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, g(1, x_2, \ldots, x_n), g(0, x_2 \ldots, x_n))$
4. Déterminer les fonctions de $\mathbb{F}_2$ correspondant aux expressions suivantes :
   (a) *si* x_1 *alors* 1 *sinon* 0
   (b) *si* x_1 *alors* 0 *sinon* 1
   (c) *si* x_1 *alors* x_2 *sinon* 0
   (d) *si* x_1 *alors* 1 *sinon* x_2. Indication : utiliser la distributivité de $+$, par rapport à $\times$.
   (e) *si* x_1 *alors* x_2 *sinon* 1. Indication : utiliser la distributivité de $+$, par rapport à $\times$.
   (f) *si* x_1 *alors* x_2 *sinon* $\overline{x_2}$
   (g) *si* x_1 *alors* $\overline{x_2}$ *sinon* x_2
5. Calculer f^*, la fonction duale de f.

Exercice 3

On considère l'ensemble des fonctions autoduales à n variables.

1. Trouver une caractérisation de ces fonctions en terme de support.
2. Trouver le nombre de fonctions autoduales à n variables.
3. Trouver les fonctions autoduales de $\mathbb{F}_2$.
4. Trouver une fonction booléenne à trois variables qui est autoduale, croissante et symétrique.

Exercice 4

On considère la fonction $\oplus$

1. Déterminer le support de $\oplus$ et en déduire la forme normale disjonctive conjonctive de $\oplus$.
2. Montrer que $(\forall(x, y) \in \mathbb{B}^2)(x \oplus y = \overline{x} \oplus \overline{y})$
3. Montrer que $(\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n)(1 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = 1 \Leftrightarrow card(\{i\ ; i \in [1, n]\ et\ x_i = 1\})\ est\ pair$

Exercice 5

Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathbb{F}_n$. On dit que f définit implicitement sa $n^{\text{ième}}$ variable si :

$$(\forall(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{B}^{n-1})\ (\exists!\, x_n \in \mathbb{B})\ (f(x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

1. Soit $f_1 \in \mathbb{F}_2$ définie par la table de vérité suivante :

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

   Montrer que f_1 définit implicitement sa seconde variable. Donner l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{F}_2$ qui définissent implicitement leur seconde variable.

2. Soit $f \in \mathbb{F}_n$. Montrer que f définit implicitement sa $n^{\text{ième}}$ variable si et seulement si :

$$(\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n),\ (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)})$$

3. Soit $f \in \mathbb{F}_n$ la fonction définie par :

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1.x_2 \ldots x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{x_i}\,\overline{x_n}$$

   Démontrer que f définit implicitement sa $n^{\text{ième}}$ variable, autrement dit qu'il existe une fonction booléenne $g \in \mathbb{F}_{n-1}$ telle que :

$$(\forall(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n)\ (f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

   que vous expliciterez.