ESIAL 1 — Module Mathématiques appliquées discrètes

Logique du premier ordre : syntaxe, termes, formules, substitution, variables libres, variables liées

Exercice 1

Rappel. Soit X un ensemble de variables et F un ensemble de symboles fonctionnels munis d'une arité (les symboles fonctionels d'arité 0 sont les constantes). On rappelle que $T(F, X)$ est l'ensemble des termes définis sur X et F de façon inductive par :

- la base : les variables et les constantes sont des termes de $T(F, X)$
- le pas d'induction : si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de $T(F, X)$ et f est un symbole fonctionnel d'arité n alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme de $T(F, X)$

Définition des positions. Une position est un mot sur le vocabulaire $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_+$ qui permet de se déplacer dans un terme. Comme usuellement le mot vide est noté ε. Une position est donc soit ε soit de la forme $i.p$ où $i \in \mathbb{N}_+$ et p est une position.

Sous-terme Soit t un terme et p une position, le sous-terme $t_{|p}$ de t à la position p est défini par récurrence sur p de la façon suivante :

- si $p = \varepsilon$ alors $t_{|\varepsilon} = t$
- si $p = i.q$ alors $t_{|i.q} = t_{i|q}$ si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$
- sinon $t_{|p}$ est non défini

1. Soient $X = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble de variables et $F = \{f, g, h, s, a, b, c\}$ un ensemble de symboles fonctionnels tels que $arité(f) = arité(g) = 2$, $arité(h) = 3$ et $arité(s) = 1$ et a, b et c sont des constantes. Mettre chacun des termes t_i $(1 \leq i \leq 5)$ suivants sous forme arborescente et donner pour chacun d'eux :
   - l'ensemble des variables du terme.
   - l'ensemble des positions du terme.
   - Les sous-termes aux positions 1.2 et 2.1.2 s'ils existent.

   $t_1 = x$, $t_2 = c$, $t_3 = h(a, b, c)$, $t_4 = g(f(x, y), g(h(x, a, z), b))$, $t_5 = f(h(a, g(x, b), x), f(g(y, s(z)), b))$
2. Montrer que pour toute position p, q on a $t_{|p.q} = (t_{|p})_{|q}$.

Exercice 2

Substitutions. Une substitution σ est une application de l'ensemble des variables X vers l'ensemble des termes $T(F, X)$ qui s'étend à l'ensemble $T(F, X)$. Une substitution se note $\sigma = \{x_1 \mapsto s_1, \ldots, x_n \mapsto s_n\}$ où les x_i sont des variables distinctes deux à deux et les s_i sont des termes différents de toutes les variables x_i. On a

- $\sigma(x_i) = s_i$ pour tout i dans $[1, n]$
- $\sigma(x) = x$ pour toute variable x différente des x_i
- $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$

Le domaine de σ est $Dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Soient les substitutions $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a, a),\ y \mapsto f(z, z),\ z \mapsto b\}$, $\sigma_2 = \{x \mapsto f(x, y),\ y \mapsto f(a, x),\ z \mapsto b\}$ et les termes $t_1 = f(x, y)$ et $t_2 = f(f(x, y), f(z, b))$

1. Donner les résultats des applications des substitutions σ_1 et σ_2 aux termes t_1 et t_2. Ecrire sous forme arborescente les termes t_1 et t_2 et les termes obtenus par substitution.
2. La taille $|t|$ d'un terme t est le nombre de nœuds de l'arbre qui le représente.

   Définir par récurrence la taille d'un terme. Montrer que pour tout terme t et toute substitution σ, $|\sigma(t)| \geq |t|$. Peut-on avoir l'égalité dans la propriété précédente (donner des exemples ou une preuve si ce n'est pas possible).

Exercice 3

On considère les symboles de variables x, y, les symboles de constantes a et b, les symboles de fonctions f et g d'arités respectives 1 et 2, les symboles de relations r et s d'arités respectives 1 et 2. Les expressions suivantes sont-elles des termes, des atomes ou des formules ?

(1) $g(b,\ f(a))$	(2) $f(g(f(x), g(y, f(a))))$
(3) $f(r(b),\ a)$	(4) $s(f(a), g(x, r(y)))$
(5) $(\forall x\ g(x, x) = b) \wedge (\exists x\ f(x) = b)$	(6) $\forall x \exists y \{\neg s(y, b) \wedge r(a) \Rightarrow s(f(a), x)\}$
(7) $\forall y\ \{s(b,\ f(y)) \vee \exists x\ f(x)\}$	(8) $r(b, f(y)) \Rightarrow s(a, \exists x\ g(a, x) = b)$

Exercice 4

Variables libres, symboles mutificateurs, variables liées.

Quand on écrit des formules dans une théorie ou un environnement quelconque, en général apparaît la notion de variables et parmi celles-ci on distingue en général les variables libres et les variables liées. Les variables liées sont celles qui sont rendues muettes par un symbole mutificateur.

1. Dans chacun des environnements suivants donner des exemples de symboles mutificateurs et préciser la notion de variables liées associée à ces mutificateurs :
   (a) En mathématiques, par exemple dans un environnement de calcul algébrique (notions de somme ou produit discrets, d'intégrale.
   (b) En mathématiques, par exemple dans un environnement de théorie des ensembles.
   (c) En mathématiques dans un environnement où on manipule des fonctions, des applications.
   (d) En logique du premier ordre.
   (e) En informatique, dans le cadre d'un langage de programmation.
2. Rappeler la définition d'une formule polie. Dans chacun des exemples suivants, calculer l'ensemble des variables libres, des variables liées (pour chaque variable, le symbole qui l'a mutifiée) et dire si la formule est polie ou non. Dans le cas où la formule n'est pas polie, en écrire une autre équivalente et polie.
   (a) $x \mapsto \int_{x}^{1-x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_i^{(j)}(y,\ t)dt$
   (b) $\sum_{j=1}^{10} (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 * j}) + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{15} \frac{j^2}{i+k})$
   (c) $E = \{i\ ;\ i \in \mathbb{N}\ et\ (\forall j \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(i = jk \Rightarrow j = 1\ ou\ k = 1)\}$
   (d) $(\forall x)(p(x,y) \vee (\exists x)(r(x,z)))$
   (e) $(\forall x)(p(x,y) \vee (\exists y)(r(x,y)))$
   (f) $\forall x[\{\forall x(p(x) \vee q(x))\} \Rightarrow \{\forall y((\exists y r(x,y)) \vee (\forall z((\exists y r(y,z)) \wedge r(x,y))))\}]$
   Indications. Mettre cette formule sous forme arborescente.