Cours esial 1a / mathématiques proba / fiche n°02
Chardon Marion

Retour

FICHE N°2 : Variables aléatoires discrètes

I) Définitions

variable aléatoire X : Ω -> X_double.gif, où X_double.gif est un certain ensemble inclus dans B^d
notation : P({ω, X=x}) = P(X=x)=P_X({x})
X est **discrète** si $\mathbb{X}$ est dénombrable.

Loi de X va :
soit {x , x ≤ M} une énumération de $\mathbb{X}$ (attention, on peut avoir M=x)
soit {p_i, i ≤ M} la suite définie par p_i=P(X=x_i),
alors Loi de X = {p_i, i ≤ M}, avec $\sum_{i=0}^{n} p_i=1$.

II) Lois discrètes usuelles

Loi de Bernouilli :
X ~ Bin(n,p)
$\mathbb{X}$ = {0;1}   p ∈ [0;1]
Loi de X : P(X=0)=1-p et P(X=1)=p
Utilisation : résultat d'un jeu binaire
E[X]=p et V(X)=p(1-p)

Loi binomiale :
X ~ B(p)
$\mathbb{X}$ = {0;1;...;n}   p ∈ [0;1]   n ∈ $\mathbb{N}^*$
Loi de X : $\boxed{P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}$
Utilisation : compte le nbre de succès dans un schéma de Bernouilli répété n fois
E[X] = np et V(X) = np(1-p)

Loi géométrique :
X ~ G(p)
$\mathbb{X}$ = $\mathbb{N}^*$ p ∈]0;1[
Loi de X : P(X=k) = p.$(1-p)^{k-1}$
Utilisation : X représente l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli répété de manière identique.
$E[X]=\frac{1}{p}$ et $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Loi de Poisson :

$X \sim P(\lambda)$

$\mathcal{X} = \mathbb{N}$ λ positif strictement

Loi de X : $\boxed{P(X=k)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} \forall k \in \mathbb{N}}$

Utilisation :
1) Modélise
- nbre de clients entrant dans une boutique
- nbre de trams passant à l'arrêt Callot entre 8h15 et 8h45
- nbre d'utilisateurs se connectant à un serveur
2) si n grand, p petit
np -> λ
alors Bin(n,p) $\approx$ P(λ)
E[X] = λ et V(X) = λ.

III) Espérance et variance

Espérance E : (valeur moyenne de X)
soit $\varphi : \mathcal{X} \to R$

$\boxed{E[\varphi(X)]=\sum_{i=1}^{M} \varphi(x_i) P(X=x_i)}$ (si la somme converge)

$\boxed{E[X]=\sum_{i=1}^{M} x_i . P(X=x_i)}$

E est linéaire !

Variance V : ($\sqrt{V(X)} = \sigma(X)$: écart-type, fluctuations moyennes de X autour de m)

$\boxed{V(X)=E[(X-m)^2]=\sum_{i=1}^{M} (x_i-m)^2 . P(X=x_i)}$ (avec m=E[X])

$V(X) = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$
système fiable si $\sigma(X)$ petit.

IV) Vecteurs aléatoires

vecteur aléaoire $X = (X_1,\dots,X_d)$: avec $(X_i)_{1<i<d}$ des va / $X_i : \Omega \to \mathcal{X}_i$
loi de X donnée par famille $\{P(X_1=x_1,\dots,X_d=x_d); (x_1,\dots,x_d) \in \mathcal{X}_1 x\dots x\mathcal{X}_d\}$
> $P(X_1=x_1,\dots,X_d=x_d) = P(X_1=x_1) \cap \dots \cap P(X_d=x_d)$

loi marginale de X_i : $\boxed{P(X_i=y)=\sum_{x_1,\dots,x_d} P(X_1=x_1,\dots,X_i=y,\dots,X_d=x_d)}$
(faire un tableau, et on additionne les lignes (ou les colonnes) pour avoir la lm)

$X_1, \dots, X_d$ sont **indépendantes** si $\boxed{P(X_1=x_1,\dots,X_d=x_d)=\prod_{i=1}^{d} P(X_i=x_i)}$ (indépendances d'évènements et de va sont liées)
Si le tableau des proba des vecteurs contient des 0, alors il n'y a pas indépendance.

Propriétés :
1) $E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]$.
2) $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$: juste si les lois sont indépendantes.

Covariance : $\boxed{COV(X_1, X_2) = E[X_1.X_2] - E[X_1].E[X_2]}$

coefficient de corrélation (de Pearson) : $\boxed{\rho_{X_1,X_2} = \dfrac{COV(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}.\sigma_{X_2}}}$ avec

$\boxed{\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \text{écart type de X}}$

ρ mesure un degré de relation linéaire entre X_1 et X_2

si ρ = 1 relation positive forte, si ρ = -1 relation négative forte, si ρ = 0 indépendance.

Propriété : (X_1 et X_2 2 va indépendantes)

$\boxed{P(S=s) = \sum_{k=0}^{s} P(X_1=k).P(X_2=s-k)}$ où $S=X_1+X_2$

> X_1, ... X_n n va **iid** (indépendantes et identiquement distribuées), de loi B(p). On pose

$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$, alors S_n~Bin(n,p).

Retour

CHARDON Marion
Webmestre