Cours esial 1a / mathématiques proba / chapitre n°2
Chardon Marion

Retour

# CHAPITRE N°2 : Variables aléatoires (va)

## PLAN :



## I) Variables aléatoires discrètes

définition :
soit $(\Omega, P)$ un espace de probabilité
Soit $X : \Omega \to \mathcal{X}$, où $\mathcal{X}$ est un certain ensemble inclus dans $B^d$.
Alors X se nomme variable aléatoire.

*exemple : X = # face sur 3 lancés, on a double X = {0,1,2,3}*

Abus de notation : soit $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une va, et $x \in \mathcal{X}$,
on note $P(\{\omega, X=x\}) = P(X=x)=P_X(\{x\})$.

définition :
soit $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une va.
On dit que X est discrète si $\mathcal{X}$ est dénombrable
(dénombrable exemple : $\mathcal{X}$ = N, Z, etc... c'est un ensemble fini).

définition :
soit $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une va discrète
soit $\{x , x \leq M\}$ une énumération de $\mathcal{X}$ (attention, on peut avoir M=x)
soit $\{p_i, i \leq M\}$ la suite définie par $p_i=P(X=x_i)$,
alors $\{p_i, i \leq M\}$ se nomme loi de X (not L(x)).

*exemple :*
*X = #face pour 3 lancés, X va discrète car {0,1,2,3} fini*
*loi de X :*
*P(X=0) = 1/8 ; P(X=1) = 3/8 ; P(X=2) = 3/8 ; P(X=3) = 1/8*

Remarques :

1) On remarque que $p_i \geq 0$, et $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$

Ceci est général si X est une va, alors $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ et $p_i \geq 0$

2) La loi de X définit une probabilité sur {0;1;2;3}

Même si on est parti d'une loi uniforme sur $\Omega = \{p,f\}^3$, la loi que l'on obtient sur {0;1;2;3} n'est pas uniforme.

3) Souvent, $\Omega$ est un ensemble compliqué à décrire, alors que double X est simple, et donc dans la pratique, on finit par oublier $\Omega$

Interprétation : $\Omega$ représente toutes les expériences possibles, alors que X est le résultat numérique d'une expérience.

---

# II) Lois discrètes usuelles

## 1) Loi de Bernoulli

X ~ B(p)
$\mathbb{X}$ = {0;1}     p ∈ [0;1]
Loi de X : P(X=0)=1-p et P(X=1)=p
Utilisation : résultat d'un jeu binaire (X=1 succès).

*exemple : X=1 si on a obtenu que l'une des faces de la pièce*
*=> X ~ B(1/2)*

Vérification : il faut vérifier que le "p" choisi vérifie les conditions (ie : $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$).

---

## 2) Loi Binomiale

X ~ Bin(n,p)
$\mathbb{X}$ = {0;1;...;n}     n ∈ $\mathbb{N}^*$ et p ∈ [0;1]
Loi : $\boxed{P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ (k = 0,1,...,n)
Utilisation : compte le nbre de succès dans un schéma de Bernoulli répété n fois.

*exemple : on fait 53 lancés de dé*
*X = # fois (sur 53) que l'on a obtenu 3*
*=> X ~ Bin(53,1/6)*

Vérification : $\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{k} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 1$.

---

## 3) Loi géométrique

X ~ G(p)
$\mathbb{X}$ = $\mathbb{N}^*$     p ∈ ]0;1[
Loi : $P(X=k) = p.(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$
Utilisation : X représente l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli répété de

manière indiquée.

> *exemple : on lance un dé de manière répétés, X = #lancés nécessaires pour obtenir la face 3*
> *=> X ~G(1/6) et P(X=2) = proba d'obtenir 3 au bout de 2 lancés exactement*
> *= 1/6.(1-1/6)$^{2-1}$ = 15%*

Vérification : $\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = 1$.

---

### 4) Loi de Poisson

X ~ P(λ)
$\mathbb{X} = \mathbb{N}$ λ positif strictement

Loi : $\boxed{P(X=k) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^k}{k!} \forall k \in \mathbb{N}}$

Utilisation :
1) Modélise
- nbre de clients entrant dans une boutique
- nbre de trams passant à l'arrêt Callot entre 8h15 et 8h45
- nbre d'utilisateurs se connectant à un serveur

2) si n grand, p petit
np -> λ
alors Bin(n,p) ≈ P(λ)

Vérification : $\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} . \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

---

## III) Espérance et variance

### 1) Définitions

déf : soit X : Ω -> $\mathbb{X}$ une va
$\mathbb{X} = \{x_i ; i \leq M\}$
et Phi : $\mathbb{X}$ -> R, alors :

1) on définit E[φ(X)] (E : espérance), par : $\boxed{E[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{M} \varphi(x_i) P(X=x_i)}$ (on note cette somme U/) si la somme U/ converge.

2) Espérance de X : $\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{M} x_i . P(X=x_i)}$

3) variance de X : m=E[X] : $\boxed{V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{M} (x_i - m)^2 . P(X=x_i)}$

> *exemple : X ~ B(p) (p appartient à [0;1]*
> *alors $\mathbb{X}$ = {0;1} et P(X=0)=1-p et P(X=1) = p*
> *et E[X] = formule = 0x(1-p) + 1xp = p équivalent à m*
> *V(X) = formule = p²x(1-p)+(1-p)².p=p(1-p)*

Deux relations utiles :
1) linéarité de l'espérance
X : Ω -> $\mathbb{X}$ une va discrète, et a,b réels,
alors E[aX+b] = a.E[X]+b
2) V(X) = E[(X-E[X])²] = E[X²] – (E[X])².

*démo de 2) :*
*m = E[X]*
*$E[(X-m)^2] = E[X^2-2mX+m^2] = E[X^2] – 2.m.E[X] + m^2 = E[X^2] – m^2$*

*exemple : si X ~B(p), calcul de la variance avec 2) :*
*$E[X]$ = formule = $0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$*
*=> $V(X) = p-p^2$*

---

## 2) Interprétation de E[X] et V(X)

1) E[X] représente la valeur moyenne de X, ie la valeur la plus représentative de toute la distribution de X.
2) $\sqrt{(V(X))} = \sigma(X)$ [écart-type], représente une moyenne des fluctuations de X autour de m.
si $\sigma(X)$ est grand, le sys aléatoire représenté par X est peu fiable, peu prévisible.
Inversement, si $\sigma(X)$ est petit, ce système aléatoire est prévisible et fiable.

*exemple : but marqués par 2 attaquants pendant les 5 derniers matchs :*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Trézéquet | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Henry | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*moyenne :* $\bar{x}_T=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=1\ but\ par\ match$ *et* $\bar{x}_H=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=1\ but\ par\ match$

*donc, les moyennes sont égales, donc ce n'est pas suffisants pour distinguer les 3 attaquants.*
*Calcul des variances : $\sigma^2$*

$\sigma_H^2=\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_H)=0(but\ par\ match)^2$ *, donc l'écart type est de 0 but par match (ie : un but à tous les coups)*

$\sigma_T^2=\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_T)=4(but\ par\ match)^2$ *, donc l'écart type est de 2 buts.*

*Conclusion : Henry est plus fiable que Trézéguet (car l'écart type est plus faible pour H que T)*

---

## 3) Calculs sur les lois usuelles

1) avec la loi de Bernouilli, on a les mêmes résultats

2) avec la loi binomiale, on obtient : $E[X]=p.\frac{\sum_{k=0}^{n-1} n.(n-1)!}{(k)!((n-1)-k)!}.p^k.(1-p)^{(n-1-k)}=np$

E[X] = np et V(X) = np(1-p)

3) avoir la loi géométrique, on obtient : $E[X]=p.\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$

la somme représente une série entière. Une série entière est dérivable sur ]-R;R[ si R est son rayon de convergence.
On reconnaît ici la dérivée d'une série entière (à cause du k et k-1). (avec R=1)
donc : $E[X]=p.\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'=p.\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)'=\frac{p}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$

Conclusion : $E[X]=\frac{1}{p}$ et $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

*exemple : on lance un dé*
*X = premier instant où l'on obtient la face 3*
*=> X ~G(p) où p = 1/6*
*alors E[X] = 6 (en moyenne, on doit lancer 6 fois le dé pour obtenir la face 3*
*V(X) = 1-p / p = 30, et donc l'écart type est de 5,5 lancés*

4) avec la loi de poisson :
là aussi on a une série entière

$$E[X]=\lambda.e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda$$

pour le calcul de la variance, on commence par calculer E[X(X-1)] (même transformation)
$E[X(X-1)] = \lambda^2$
$E(X^2)$ : $E(X^2 - X) = \lambda^2$, donc $E(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$
donc $V(X)$ = formule = $\lambda$
conclusion : $E[X] = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

> *exemple : X = # nbre de trams passant par l'arrêt Callot entre 10h et 11h*
> *modélisation : X soit une loi de poisson pour $\lambda$ ($\lambda$ est le nbre moyen de trams)*
> *car $\lambda$ = E[X].*
> *hypothèse : $\lambda$ = 16*
> *alors, l'écart type est 4*

---

# IV) Vecteurs aléatoires

## 1) Définitions de lois marginales

déf : soit $(\Omega, P)$ espace d'expérience
soient $(X_i)_{1<i<d}$ des va / $X_i : \Omega \to \mathbb{X}_i$
1) le vecteur $X = (X_1,\dots,X_d)$ se nomme vecteur aléatoire de dimension d.
2) La loi de X donnée par famille $\{P(X_1=x_1,\dots,X_d=x_d); (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{X}_1 x\dots x\mathbb{X}_d\}$

$P(X_1=x_1,\dots,X_d=x_d) = P(X_1=x_1 \cap \dots \cap X_d=x_d)$.

3) la loi marginale de $X_i$ est donnée par :

$$\boxed{P(X_i=y)=\sum_{x_1,\dots,x_d} P(X_1=x_1,\dots,X_i=y,\dots,X_d=x_d)}$$

> *exemple :*
> *$\Omega = \{p,f\}^2$ $\qquad$ X = {X1,X2}*
> *X_1($\omega$) = double 1_A($\omega$) = A si on est sur A, et 0 sinon*
> *X_1($\omega$) = double 1_B($\omega$)*
> *A = « au plus 1 pile »*
> *B = « au moins 1 pile, au moins un face »*

| $\omega$ | $X(\omega)$ |
|---|---|
| ppp | (0,0) |
| ppf | (0,1) |
| pfp | (0,1) |
| pff | (1,1) |
| fpp | (0,1) |
| fpf | (1,1) |
| ffp | (1,1) |
| fff | (1,0) |

> *Loi de X : $\mathbb{X} = \{0,1\}^2$*
> *=> loi de X donnée par la famille*
> *P(X=(0,0)) = 1/8 et P(X=(0,1)) = 3/8*
> *P(X=(1,0)) = 1/8 et P(X=(1,1)) = 3/8*

loi marginale de $X_1$ :
$P(X_1=0)$ = formule = 1/8 + 3/8 = 1/2
$P(X_1=1)$ = formule = ½
=> $X_1 \sim B(1/2)$ (loi de Bernoulli)

loi marginale de $X_2$ :
$P(X_2=0)$ = formule = 1/8 + 3/8 = 1/2
$P(X_2=1)$ = formule = ½
=> $X_2 \sim B(1/2)$ (loi de Bernoulli)

déf : on note que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes si, pour tout $(x_1,\ldots, x_d)$ appart $(\mathbb{X}_1 \text{x} \ldots \text{x} \mathbb{X}_d)$, on a :

$$\boxed{P(X_1=x_1,\ldots,X_d=x_d)=\prod_{i=1}^{d} P(X_i=x_i)}$$

Remarque :
les notions d'indépendances de va et d'événements sont liées :
si on pose $A_i=(X_i=x_i)$, alors $P(A_1 \cap \ldots \cap A_d)$ = prod[ $P(A_i)$]
> les évènements A_i sont indépendants.

*pour l'exemple précédent :*
*il faut vérifier toutes les conditions ( )*

*$P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)P(X_2=0)$*
*et pareil pour toutes les combinaisons à partir des valeurs que peuvent prendre $X_1$ et $X_2$*
*ici, tout est vérifié, donc $X_1$ et $X_2$ sont indépendants*
*on pouvait s'y attendre, car A indépendant de B.*

pour calculer les proba où $\mathbb{X}$ à plus de 2 éléments (dans le cas de la pièce par exemple), on fait un tableau, et on y ajoute la loi marginale (on a plus qu'à additionner soit les lignes soit les colonnes)

| $Y_1$ / $Y_2$ | 0 | ... | d | Marg $Y_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | Somme ligne |
| ... | | | | |
| d | | | | |
| Marg $Y_2$ | Somme colonne | | | |

Remarque :
De manière générale, si un tableau de la loi contient des 0, les va ne sont pas indépendantes.
On peut trouver des relations déterministes entre les lois, comme : $Y_2 = 3-Y_1$.

Propriétés :
soit $X = (X_1,X_2)$, couple de va, alors :
1) $E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]$.
2) $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$ : juste si les lois sont indépendantes.

## 2) Coefficient de corrélation

déf : soient $X_1$, $X_2$ 2 va
1) la covariance entre $X_1$ et $X_2$ est définie par :

$$\boxed{COV(X_1,X_2)=E[(X_1-E[X_1]).(X_2-E[X_2])]}$$

2) le coefficient de corrélation (de Pearson) entre $X_1$ et $X_2$ est défini par :

$$\boxed{\rho_{X_1,X_2}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}.\sigma_{X_2}}}$$ avec $$\boxed{\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\text{écart type de X}}$$

Remarque :

on peut calculer COV (X_1, X_2) sous la forme :

$$\boxed{COV(X_1,X_2)=E[X_1.X_1]-E[X_1].E[X_2]}$$

interprétation de ρ_$X_1$,$X_2$ :

1) -1 =< ρ =< 1

2) ρ mesure un degré de relation linéaire entre $X_1$ et $X_2$

3) si ρ = 1, relation linéaire positive forte entre $X_1$ et $X_2$

si ρ = -1, relation linéaire négative forte entre $X_1$ et $X_2$

si ρ = 0, indépendance linéaire entre $X_1$ et $X_2$

graphiquement : si ρ = 1 : graphe (axe X, axe Y) : on a une droite du type y=ax + b
si ρ = -1 : droite y=-ax + b
si ρ = 0 : nuage de points : $X_1$ indépendant de $X_2$
si on trouve une parabole par exemple avec ρ=0 => $X_1$ non indépendant de $X_2$.

Remarque :

pour le calcul de ρ, on a besoin de l'espérance, de la variance de $X_1$, $X_2$, et $X_1.X_2$

*exemple :*
*1) (le même)*
*comme on a trouvé que $X_1$ indépendant de $X_2$, on s'attend à trouver $\rho$=0*
*$E(X_1)$ = ½ (car $X_1$~B(1/2))*
*$E(X_2)$=3/4 (car $X_2$~B(3/4))*
*$E(X_1.X_2)$ = formule = 3/8*
*donc $COV(X_1,X_2) = 0$*
*et $\rho_{X1,X2} = 0$ également (youpi!)*
*2) pour la loi déterministe trouvée : $Y_2=3-Y_1$, on doit trouver $\rho = -1$.*

---

## 3) Sommes des va discrètes

Propriétés :
soient $X_1$, $X_2$ : Ω > N
2 va indépendantes.
On pose $S = X_1 + X_2$, alors
(i) S va à valeurs dans N
(ii) $$\boxed{P(S=s)=\sum_{k=0}^{s} P(X_1=k).P(X_2=s-k)}$$

*démo :*
*$P(S=s) = P(\bigcup_{k=0}^{s} [(X_1=k) \cap (X_2=s-k)])$*

*soit $A_k = (X_1=k) \cap (X_2=s-k)$*
*les $A_k$ sont tous disjoints.*
*Donc $P(S=s) = \Sigma_{k=0}^{s}(P((X_1=k) \cap (X_2=s-k)))$*
*les 2 évèn sont indépendants, d'où*
*$= \Sigma_{k=0}^{s}(P(X_1=k) . P(X_2=s-k))$.*

Application : soient X_1, ... X_n n va iid (indépendantes et identiquement distribuées), de loi B(p). On pose $\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$, alors $S_n$~Bin(n,p) pour tt n ≥ 1.

*démo : par récurrence*
*pour n=1, $S_1=X_1$, montrons que $X_1$ ~ Bin(1,p)*
*$P(X_1=0) = 1-p = C_1^0\, p^0.(1-p)^{1-0}$*
*$P(X_1=1) = p = C_1^1\, p^1.(1-p)^{1-1}$*
*si la prop est vrai à l'ordre n ($S_n$ ~ Bin(n,p), alors*
*$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$*
*$S_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes*
*donc (pour k=1,...,n) $P(S_{n+1} = k) = P(X_{n+1} + S_n=k)$ = formule de prop précédente*
*$= P(X_n=0).P(S_n=k)+P(X_{n+1}=0).P(S_n=k-1)$*
*$= (1-p)C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n+1-k} + p.\, C_n^k\, p^{k-1}\, (1-p)^{n+1-k}$*
*avec le triangle de Pascal, on obtient ce qu'il faut.*
*Il reste à traiter les cas : k=0 et k=n*

Application : on a vu que si X ~ Bin(n,p), alors E[X] = n.p et V(X) = n.p.(1-p) (avec calculs pénibles)

décomposition X= $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ avec $Z_i$ iid B(p), on peut retrouver le résultat de manière plus élémentaire.

*démo :*
*E[X] = E[ $\sum_{i=1}^{n} Z_i] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_i] = np$ et pareil pour V(X).*

---

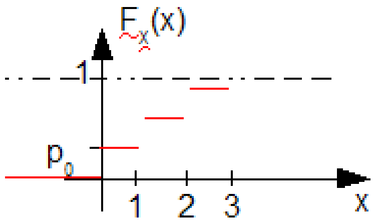
## V) Variables aléatoires continues

### 1) Définition

déf : soit (Ω, P) espace d'expérience
Une application X : Ω -> $\mathbb{R}$ se nomme variable aléatoire réelle

déf : soit X : Ω -> $\mathbb{R}$, var (réelle), soit $F_X$ : $\mathbb{R}$ -> [0;1] la fonction définie par :
$F_X(x) = P(X \leq x)$
$F_X$ est appelée fonction de répartition de X (=fr)

*exemple :*
*X ~ P(λ) (loi de poisson)*
*alors $P(X=k) = e^{-\lambda}.\lambda^k / k!$ pour tout k de $\mathbb{N}$*
*si x<0, alors $P(X \leq x)=0$ car $X \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$*
*si x=0, alors $P(X \leq x)=P(X=0)=p_0 \Rightarrow F_X(x) = p_0$*
*si 1>x≥0, alors $P(X \leq x)=P(X=0) \Rightarrow F_X(x) = p_0$*
*si x=1, alors $P(X \leq x)=P(X=0) + P(X=1)=p_0+p_1 \Rightarrow F_X(x) = p_0 + p_1$*
*et pour tt x / $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = p_0 + p_1$*




Théorème :

soit X : Ω -> ℝ var et soit $F_X$ sa fr, alors :

i) x -> $F_X(x)$ croissante

ii) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F_X(x)=1}$ et $\boxed{\lim_{x \to -\infty} F_X(x)=0}$

iii) $F_X$ càdlàg (continue à droite avec des lim à gauche)

déf et propriété : soit X var

1) la loi de X est donnée par la famille {P(X ∈ A) ; A ⊂ ℝ}

2) la loi de X est en fait caractérisée par la famille {$F_X(x)$, x ∈ ℝ}

$F_X(x)$ signifie P(X ∈ ]-∞, x])

déf : soit X var de fr $F_X$

1) si $F_X$ est constante par morceaux, X est une va discrète

2) si $F_X$ est une fonction continue, on dit que X est une variable aléatoire continue

3) si $\boxed{F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt}$, on dit que X est absolument continue, et admet f pour densité (cas particulier important)

4) si X admet f pour densité, alors f caractérise la loi de X et quelque soit A ⊂ ℝ,

$\boxed{P(X \in A)=\int_A f(t).dt}$

Proposition :

soit X va de densité f, alors

i) f : ℝ -> ℝ est positive

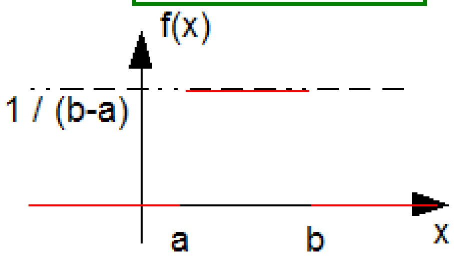
ii) $\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t).dt=1}$

---

## 2) Exemples usuels

### a) Loi uniforme X ~ U([a,b])

densité : $\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)}$




utilisation : seule va disponible sur ordinateur.

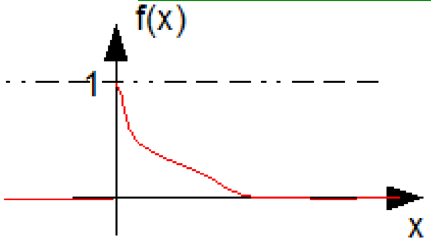
*exemple :*
*soit X ~ U([2,4])*

*calculons P(2,20 ≤ X ≤ 6,75)*
*alors $f_X(x)$ = formule*
*et P(2,20 ≤ X ≤ 6,75) = intégrale de la densité = 0,90*

---

## b) Loi exponentielle $X \sim \varepsilon(\lambda)$ $\lambda > 0$

densité : $\boxed{f_X(x)=\lambda.e^{-\lambda.x}1_{\mathbb{R}^+}(x)}$




utilisation : intervalle de temps entre l'arrivée de 2 clients dans une boutique ou 2 utilisateurs sur internet

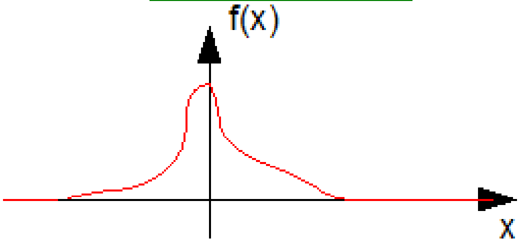
*exemple :*
*soit $X \sim \varepsilon(2)$*
*calcul de P(X > 4)*
*alors P(X > 4) = intégrale de la densité = 0,90*

---

## c) Loi gaussienne $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

densité : $\boxed{f_X(x)=\dfrac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}}}{\sqrt{2.\pi.\sigma^2}}}$




si σ petit : max élevé, et inversement
utilisation : modélise des systèmes complexes dépendant de nombreux petit facteurs indépendants
⚠ on ne connaît pas de primitive exacte de f
> calculs de type P(a ≤ X ≤ b) seront approchées

---

## 3) Espérance - variance

déf : soit X : Ω -> $\mathbb{R}$ une va de densité $f_X$, alors

1) soit φ : $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$. on note E[φ(X)] la quantité : $\boxed{E[\varphi(X)]=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x).f_X(x).dx}$ si i l'int est convergente

2) si φ = $Id_X$

$$\boxed{E[X]=\int_{\mathbb{R}} x f_X(x).dx}$$

3) la variance de X déf par V(X) = E[(X-m)²] avec m=E[X]

d'où $\boxed{V(X)=\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2.f_X(x).dx}$

Remarque :

convention de notation

X : variable aléatoire

x : variable numérique d'intégration

Calculs pour les lois usuelles :

i) X ~ U([a,b])

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)}$$

(voir le graphe plus haut)

alors E[X] = formule = (a+b)/2

De même, en intégrant un polynôme du second degré, on trouve :

V(X) = (b-a)²/12

et donc σ = (b-a)/{2 √(3)}

ii) X ~ epsilon(λ)

$$\boxed{f_X(x)=\lambda.e^{-\lambda.x}1_{\mathbb{R}^+}(x)}$$

(voir le graphe en haut)

E[X]=formule=1/λ (astuce : intégration par parties)

V(X) = 1/λ² (astuce : 2 intégrations par parties successives)

iii) X ~ N(0,1) (c'est une gaussienne standard)

$$f_X(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2.\pi}}$$

(voir le graphe plus haut)

E[X] = formule = 0

et V(X) = formule = ... = intégrale de f = 1 (d'après le cours)

## 4) Changement sur les densités de variables aléatoires

problème : soit X une va de densité $f_X$, et soit g : $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$, et on pose Y=g(X).

Quelle est la densité de Y ?

critère : soit Z une va telle que pour tout phi appart $C_b(\mathbb{R})$ (fonctions continues et bornées), on a

$$\boxed{E[\varphi(X)]=\int_{\mathbb{R}} \varphi(x).f_X(x).dx}$$

alors Z est une va absolument continue, admettant f comme densité

*exemple 1 :*

*chez un médecin, le temps d'attente est modélisée par une va Y=X+5 avec X ~ε(1). Question : densité de Y ?*

*soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. On calcule :*

$$E[\varphi(Y)]=E[\varphi(X+5)]=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+5).f_X(x).dx=\int_0^{+\infty}\varphi(y).e^{-y-5}.dy=\int_{\mathbb{R}}\varphi(y).e^{-y-5}.1_{[5,+\infty[}(y).dy$$

*f découle d'une loi uniforme, donc on connaît son expression.*
*On fait un changement de variable pour enlever le « 5 » de $\varphi$*
*attention : il faut intégrer les bornes 5 et $\infty$ dans la fonction densité*
*conclusion : densité de Y est ce qu'il y a après $\varphi(y)$.*

*exemple 2 :*
*supposons que l'indice de mécontentement des patients soit donné par Z=ln(X).*
*densité de Z ?*
*soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$*

$$E[\varphi(Z)]=E[\varphi(\ln(X))]=\int_0^{+\infty}\varphi(\ln(x)).e^{-x}.dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y).e^{y-e^y}.dy$$

*changement de variable pour enlever le ln(x). (attention aux bornes).*

*exemple 3 :*
*soit X ~N(0,1)*
*on pose $Y = m+\sigma X$*
*avec $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$*
*question : densité de Y ?*
*soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, alors*

$$E[\varphi(Y)]=E[\varphi(m+\sigma X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(m+\sigma X).\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2.\pi}}.dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y).\frac{e^{-\frac{(y-m)^2}{2.\sigma^2}}}{\sqrt{2.\pi.\sigma^2}}.dy$$

Proposition :
soit X ~ N(0,1) et Y = m+ σ X, avec m réel, σ ≠ de zéro,
alors Y ~ N(m,σ²)

Application : soit X ~ N(μ,σ), alors E[Y]=μ et V(Y)=σ²

*on écrit $X=\sigma X + \mu$*
*alors $E[Y] = \sigma E[X] + \mu$*
*$V(Y) = \sigma^2 V(X) = \sigma^2$*

---

## 5) Vecteurs aléatoires

déf : soit $X = (X_1,\dots,X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ vecteur aléatoire

1) la fonction de répartition de X est définie par $x=(x_1,\dots,x_d)$ appart $\mathbb{R}^d$
$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$

2) on dit que Y est absolument continue s'il existe une fonction f, tq :

$$\boxed{F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y_1,\dots,y_d).dy_1\dots dy_d}$$

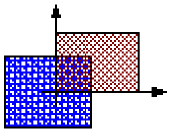
3) soit X vect aléatoire de densité $f_X$
alors la va $X_i$ a pour densité $f_{Xi}$ définie par :

$$\boxed{f_{X_i}(x_i)=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}f_X(y_1,\dots,y_{i-1},x,y_{i+1},\dots,y_d).dy_1\dots dy_{i-1}dy_{i+1}\dots dy_d}$$

4) soit X vecteur aléatoire de densité $f_X$. Alors les coordonnées $X_1,\dots,X_d$ de X sont indépendantes si $\boxed{f_X(x_1,\dots,x_d)=\prod_{i=1}^{d}f_X(x_i)}$

*exemple :*

*$X=(X_1,X_2)$ = « nombre au hasard dans [0,1] »*
*$X \sim U([0,1])$ ie $f_X(x) = 1_{[0,1]^2}(x)$ avec $x=(x_1,x_2)$*
*1) calcul de $F_X$*
*on utilise la formule précédente*
*$F_X(x_1,x_2) = 0$ si $x_1 \leq 0$ ou $x_2 \leq 0$*
*$= \inf(x_1,1) \times \inf(1,x_2)$ si $x_1$ et $x_2 \geq 0$*



*2) calcul loi marginale :*
*loi de $X_1$ :*
*$f_{X1}(x_1)$ = formule précédente = $1_{[0,1]}(x_1)$*
*pareil pour $f_{X2}(x_2)$*
*d'où $X_1 \sim U([0,1])$ et pareil pour $X_2$*
*(on utilise la décomposition : $1_{[0,1]^2}(x_1,x_2) = 1_{[0,1]}(x_1) \times 1_{[0,1]}(x_2)$)*
*3) Peut-on dire que ces lois sont indépendantes ?*
*$f_X(x_1,x_2) = \ldots = f_{X1}(x_1).f\_X2(x_2)$*
*oui : c'est indépendant d'après la formule précédente*

---

## 6) Quelques relations

On considère des va réelles, alors :
$E[aX+b] = a.E[X]+b$, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$
$V(aX + b) = a^2.V(X)$, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{E[\sum_{i=1}^{d} X_i]=\sum_{i=1}^{d} E[X_i]}$$

$$\boxed{V(\sum_{i=1}^{d} X_i)=\sum_{i=1}^{d} V(X_i)}$$ si $X_i$ indépendants

soient X et Y indépendants et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
alors $E[\varphi(X).\psi(Y)]E[\varphi(X)].E[\psi(Y)]$
(équivalent de la séparation d'intégrales aux variables distinctes)

---

## 7) Convergence de variables aléatoires (disctrète et continue)

déf : soit $(X_1,\ldots,X_n)$ des va.
on dit que $(X_1,\ldots,X_n)$ est un n-échantillon si les va $X_i$ sont iid (indép. et identiquement distribuées)

*exemple :*
*Tirages de dé pour i = 1 à n*
*on pose :*
*$X_i = 1$ si on a obtenu 6 au premier coup*
*$X_i = 0$ sinon*
*alors $(X_1,\ldots,X_n)$ est un n-ech de loi B(1/6)*

Question : que peut-on dire du comportement asymptotique de $n \to \overline{X}_n$

déf : soit $(X_1,\ldots,X_n)$ n-échantillon.

on pose $\boxed{\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

$\bar{X}_n$ se nomme moyenne asymptotique des $X_i$.

déf : soit $(Y_1,\dots,Y_n)$ suite de va.
on dit que $Y_n$ converge presque surement vers une va Y si
pour tout $\omega \in \Omega$ on a :
$\boxed{\lim_{n\to\infty} Y_i(\omega) = Y(\omega)}$

**Théorème : (loi des grands nombres)**
soit $(X_1,\dots,X_n)$ suite de va iid tq $E[|X|] < \infty$
alors $\boxed{\bar{X}_n \to n \,(quand\; n\to\infty\; presque\, sûrement)}$ avec $m = E[X_i]$
ie pour tout $\omega \in \Omega$, $\boxed{\bar{X}_n(\omega) \to n\,(quand\; n\to\infty)}$

*exemple :*
*simulation de tirages de dé avec $X_i$=1 si 6 au premier coup, 0 sinon*
*on devrait avoir $\bar{X}_n$ -> 1/6 pour tout $\omega \in \Omega$*
*observation :*
*$\bar{X}_{100}$ = 0,197*
*$\bar{X}_{500}$ = 0,145*
*$\bar{X}_{1000}$ = 0,175*
*$\bar{X}_{5000}$ = 0,168*

Question : à quelle vitesse a-t-on convergence de $\bar{X}_n$ vers m ?

**Proposition :**
soit $(X_1,\dots,X_n)$ n-échantillon tq $E[X_i]=m$, $V(X_i)=\omega^2$
alors $E[\bar{X}_n]$ = m et $\boxed{V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0\,(quand\; n\to\infty)}$

*démo :*

$E[\bar{X}_n]$ = $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = m$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

*les $X_i$ sont indépendants, donc*

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Remarque :
D'après cette prop, $\bar{X}_n$ se concentre autour de m, losrque n -> $\infty$, avec des fluctuations d'ordre $\sigma / \sqrt{n}$

**Théorème : (th de contrôle de la limite)**
soit $(X_1,\dots,X_n)$ suite de va iid, tq $V(X_i) < \infty$
on pose $E[X_i]=m$ et $V(X_i)=\sigma^2$

alors $\boxed{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \to Z \, (quand\ n \to \infty)}$

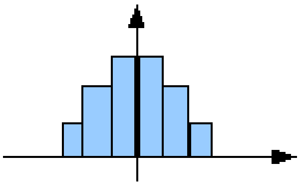
avec Z ~ N(0,1).

ie, si on pose $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma}$, alors pour tout x réel :

$P(Z_n \leq x) \to P(Z \leq x)$ (convergence simple d'une suite de fonction)

$F_n(x) \to F(x)$

Observation de TCL : pour N=100000, $w_1,\dots,w_N$, on fait n = 1000 tirages de dé.
Pour chaque $w_i$, on calcule $\bar{X}_i(w_i)$. On trouve alors un histrogramme de données :
$(\bar{X}_1(w_1),\dots,\bar{X}_N(w_N)) = (x_1,\dots,x_N)$
on trouve



*exemple :*
*on condièdre des valeurs de pièces contenant théoriquement 25 pièces. Soit X la va représentant le nbre de pièces dans un rouleau. On suppose que X $\in$ {24,25,26} et :*
*P(X=24) = 0,03*
*P(X=25) = 0,96*
*P(X=26) = 0,01*
*1) calcul de E[X] = m et V(X)=$\sigma^2$*
*E[X] = sum from i=24 to 26 (i.P(X=i) = ... = 24,98*
*E[X²] = sum from i=24 to 26 (i².P(X=i) = ... = 624,04*
*V(X) = E[X²] - (E[X])² = 0,0396*
*=> $\sigma$(X) = 0,20*
*2) on considère n=400.*
*calcul de la proba d'avoir mois ne 10000 pièces sur les 400 rouleaux*
*modélisation : 0 ≤ n = 400*
*soit $X_i$ = #pièces dans les rouleaux i*
*hypothèse : {$X_i$, i ≥ 1} iid de même loi que $X_i$.*
*On cherche P( sum des $X_i$ ≤ M) avecM=10000*

*or* $\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant M \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leqslant \dfrac{M}{n} \Leftrightarrow \bar{X}_n \leqslant \dfrac{M}{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \leqslant \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{M}{n} - m}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant \sqrt{n}\,\dfrac{\frac{M}{n} - m}{\sigma}$

*avec Z ~ N(0,1)*
*d'où, en remplaçant par les chiffres, on trouve : 0,9085.*

---

***Retour***

CHARDON Marion
Webmestre