Cours esial 1a / mathématiques proba / chapitre n°1
Chardon Marion

Retour

CHAPITRE N°1 : Probabilités élémentaires

PLAN :

I) Probabilité d'un évènement

1) Introduction

but : les proba servent à modéliser mathématiquement des expériences physique dont le résultat n'est pas prévisible exactement.

2) Probabilité d'un évènement

En général, on note Ω = espace des expériences possibles.

exemple : pour un lancer de dé, ce sera {1;2;3;4;5;6}

évènement A = sous-ensemble de Ω, ie $A \subset \Omega$
Opérations sur les évènements :
union, intersection, complémentaire (X^C ou $\overline{X}$).

soit Ω espace d'expérience
Une probabilité sur Ω est une application P : $\mathfrak{P}(\Omega) \to [0;1]$ ($\mathfrak{P}$ est une partie de Ω) telle que :
1) $P(\Omega)=1$
2) $P(\emptyset)=0$
3) si $A,B \subset \Omega$ / $A \cap B=\emptyset$ alors $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

vocabulaire :
$\emptyset$: évènement impossible
$A \cap B=\emptyset$: A et B sont des évènements incompatibles
P([a;b]) = b-a (on parle de tirage uniforme) (les bornes ouvertes ou fermées non pas d'importance).

proposition : soit Ω espace d'expériences, et $A,B \subset \Omega$, alors :
1) $P(A^C) = 1-P(A)$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

II) Probabilité uniforme sur un ensemble fini

hypothèses :
1) $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N\}$ avec N donné
2) quelque soit i, $P(\{\omega_i\})=1/N$.

propriété : lorsque l'hypothèse est vérifiée,
alors quelque soit $A \subset \Omega$, P(A) est donné par :

$$\boxed{P(A)=\frac{card\ A}{N}=\frac{|A|}{N}=\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}}}$$

Ceci est un cas très particulier de proba.

Remarque :
Dans le cas uniforme sur un ensemble fini, calculer des proba revient à calculer la taille des évènements (c'est le dénombrement).

III) Analyse combinatoire

1) Permutation

définition :
une permutation de n objets est une suite ordonnée de ces n objets.
dénombrement : P_n = # permutation de n-objets
=> $P_n = n!$

2) Arrangement

définition :
un arrangement de p objets parmi n est une collection ordonnée de p de ces n objets. (au maximum une fois)
dénombrement : $A_n^p=$ nbre n'arrangement de p objets parmi n

$$\boxed{A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}=n.(n-1)\ldots(n-p+1)}$$

définition : arrangement avec répétition
Chaque objet peut être pris au plus p fois
dénombrement : $\boxed{A_n^p=n^p}$.

3) Combinaison

définition :
une combinaison de p objets parmi n est une collection non-ordonnée de p de ces n objets.

dénombrement : C_n^p= nbre de p objets parmi n

$$\boxed{C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}}$$

IV) Probabilité conditionnelle

1) A sachant B

Remarque :

La probabilité d'un événement peut changer lorsque l'on se donne une information supplémentaire.

exemple : on cherche la probabilité d'un évènement sachant un autre (comme obtenir un multiple de tois sachant l'information : tirer un chiffre pair
On modélise ces probabilités à l'aide d'un arbre.

définition (probabilité de A sachant B) :
soit Ω un espace d'expérience avec une probabilité P
soit B ⊂ Ω un événement tq P(B) > 0

alors on pose $\boxed{P(A|B) = P\frac{(A\cap B)}{P(B)}}$ tq A ⊂ Ω.

Remarque :

posons $P_B(A) = P(A|B)$

alors P_B définit une probabilité sur Ω.

Pour calculer une probabilité uniforme sur [a;b], on a : $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{aire(A)}{aire(\Omega)}$

Pour connaître la probabilité uniforme de A sachant B, se sera donc l'aire de A ∩B sur l'aire de B
(faire un graphe, on voit mieux).

propriété :

1) $P(A|B)=\frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$

2) $P(A\cap B)=P(B|A).P(A)$

3) $P(A\cap B\cap C)=P(C|A\cap B)\cup P(B|A).P(A)$.

propriété : (formule de BAYES)

soit $\{H_k$; k entier naturel$\}$ partition de Ω (les H_k sont disjoints et leur union est égale à Ω)
et A ⊂ Ω / P(A) > 0

alors $\boxed{P(H_k|A)=\frac{P(A|H_k).P(H_k)}{\sum_{j=1}^{N} P(A|H_j).P(H_j)}}$.

2) Indépendance

définition :

Soit Ω espace d'expériences et $A,B \subset \Omega$.
On dit que A et B sont indépendant (notation $A \perp B$) si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Remarques :

1) si $A \perp B$, alors $P(A|B) = P(A)$ (la réalisation de B ne change pas de la probabilité de A)

2) si $A \perp B$, alors $A \perp B^C$, $A^C \perp B$, $A^C \perp B^C$

3) pour $A \subset \Omega$, $A \perp \emptyset$ et $A \perp \Omega$

4) ne pas confondre $A \perp B$ et $A \cap B = \emptyset$...

De manière général, indépendance et disjoint sont 2 notions antagoniques, ie si A et B sont 2 évènements / $A \perp B$ et $A \cap B = \emptyset$, alors soit $P(A)=0$, soit $P(B)=0$

5) On peut avoir A,B,C 2 à 2 indépendants, mais tq $P(A \cap B \cap C) \neq P(A).P(B).P(C)$.
(les 3 évènements ne sont pas indépendants).

définition :
3 évènements A,B et C sont mutuellement indépendants si :
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$
$P(A \cap C) = P(A).P(C)$
$P(C \cap B) = P(C).P(B)$
et $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$.

Remarque : Généralisation possible de la définition à n évènements.

Retour

CHARDON Marion
Webmestre