Prérequis pour l'UE 4.01 PROBABILITE 1

V. RIES

30 janvier 2007

Chapitre 0

Outils pour les probabilités

0.1 Assertion - Propriété

Définition *On appelle assertion (ou proposition) toute affirmation à laquelle on ne peut attribuer que l'une ou l'autre des deux valeurs : "Vrai" (V) ou "Faux" (F).*

Par exemple :

. *4 est un entier pair* est une assertion vraie

. *4 est un nombre premier* est une assertion fausse [1]

. *100 est un grand nombre* n'est pas une assertion

Définition *On appelle propriété sur un ensemble E toute application $\mathcal{T}$ de E dans l'ensemble des assertions. Si $\mathcal{T}(x)$ est vraie, on dit que x possède la propriété $\mathcal{T}$.*

Certaines propriétés peuvent s'exprimer par une locution (une propriété au sens littéral du terme). Par exemple, *être un nombre premier* est la propriété sur $\mathbb{N}^*$ qui, à tout entier naturel non nul n, associe l'assertion *n est premier*. Si on note $\mathcal{T}$ cette propriété, $\mathcal{T}(n)$ est l'assertion : *n est un nombre premier*.

Définition *On appelle propriété caractéristique d'une partie A d'un ensemble E toute propriété sur E que possèdent tous les éléments de A et que ceux-ci sont seuls à posséder* [2].

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, la propriété $\mathcal{N} :=$ *être strictement négatif* est caractéristique de l'intervalle $]-\infty, 0[$ (parmi tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$). On note

$$]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{N}(x) \textit{ est vraie}\}$$

ou plutôt, avec la convention habituelle de ne pas répéter sans cesse que, sauf mention contraire, on n'écrit que des assertions vraies :

$$]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{N}(x)\}$$

[1] "*4 est un nombre premier* est une assertion fausse" est une assertion vraie !

[2] *appartenir à A* est une propriété caractéristique de A (mais sans intérêt)

0.2 Connecteurs logiques

1. **Définition** *On appelle connecteur logique toute opération dans l'ensemble $\mathbb{A}$ des assertions, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}$.*

   Par exemple, la table de vérité ci-dessous définit un connecteur logique quelquefois noté "ou bien" :

a	b	a ou bien b
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   Rappelons la définition des connecteurs logiques les plus usités :

a	b	non a	non b	a et b	a ou b	a imp b	a équ b
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

   Remarque a imp[3] $b =$ (non a) ou b
   a équ[4] $b = \big(a$ ou (non $b)\big)$ et $\big(($non $a)$ ou $b\big)$
   a ou bien $b =$ non $(a$ équ $b) = \big(a$ et (non $b)\big)$ ou $\big(($non $a)$ et $b\big)$

2. Il s'en induit naturellement des opérations dans l'ensemble des propriétés sur un ensemble E. Ces opérations sont encore appelées connecteurs logiques et portent les mêmes noms. Par exemple :
   . si $\mathcal{A}$ est une propriété sur E, (non $\mathcal{A}$) est la propriété sur E définie pour tout x de E par : (non $\mathcal{A})(x)$:=non$\big(\mathcal{A}(x)\big)$.
   . si $\mathcal{B}$ est une autre propriété sur E, ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est la propriété sur E définie pour tout x de E par : $(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})(x) := \big(\mathcal{A}(x)$ ou $\mathcal{B}(x)\big)$
   . ($\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B}$) est la propriété définie par : $(\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B})(x) := \big(\mathcal{A}(x)$ imp $\mathcal{B}(x)\big)$

3. Il existe un lien clair entre les opérations dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E et les opérations dans l'ensemble des propriétés sur E : si A est la partie de E caractérisée par la propriété $\mathcal{A}$ et si B est la partie de E caractérisée par la propriété $\mathcal{B}$, alors (non $\mathcal{A}$), ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$), ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$)... sont respectivement des propriétés caractéristiques de A^c, $A \cap B$, $A \cup B$...

$x \in\downarrow$	$\mathcal{A}(x)$	$\mathcal{B}(x)$	$(\mathcal{A}$ et $\mathcal{B})(x)$	$(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})(x)$	$(\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B})(x)$	$(\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B})(x)$
$A \cap B$	V	V	V	V	V	V
$A \cap B^c$ [0]	V	F	F	V	F	F
$A^c \cap B$	F	V	F	V	V	F
$A^c \cap B^c$	F	F	F	F	V	V

[3] imp (pour *implication*) est souvent noté (de façon abusive) $\Rightarrow$
[4] équ (pour *équivalence*) est souvent noté (de façon abusive) $\Leftrightarrow$
[0] $A \cap B^c$ est souvent noté $A \backslash B$

0.3 $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des propriétés caractéristiques de deux parties A et B d'un même ensemble E.

Pour que $A = B$, il faut et il suffit que $A\backslash B$=$B\backslash A = \emptyset$ et on lit dans la table de vérité ci-dessus que ceci se produit si et seulement si la propriété ($\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}$) est vraie sur E tout entier. L'assertion "($\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}$) est vraie sur E tout entier" se lit : "la propriété $\mathcal{A}$ est équivalente à la propriété $\mathcal{B}$" (ou : "$\mathcal{A}$ est équivalente à $\mathcal{B}$") et se note : $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

De même, $A \subseteq B$ si et seulement "($\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B}$) est vraie sur E tout entier", ce qui se lit : "$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$" et se note : $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Remarques

1. $\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B}$ sont des propriétés sur E mais $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sont des assertions (éventuellement fausses).
   Par exemple, si $E = \mathbb{N}$ et si on note $\mathcal{A} := \textit{être multiple à la fois de } 4 \textit{ et de } 6$, $\mathcal{B} := \textit{être multiple de } 24$ et $\mathcal{C} := \textit{être multiple de } 12$,
   ($\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}$)(48) est vrai mais ($\mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}$)(12) est faux donc l'assertion $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est fausse, contrairement à l'assertion $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$.
   Rappel : par convention, une assertion écrite sans mention de sa valeur est censée être vraie : on écrit $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ de préférence à "$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ est vrai".
2. L'assertion $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ a même valeur que sa contraposée : (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$).
3. Les "règles de De Morgan" :
   $$\Big(\text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})\Big) \Leftrightarrow \Big((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})\Big)$$
   $$\Big(\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})\Big) \Leftrightarrow \Big((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})\Big)$$
   ne sont rien d'autre que la transposition des identités ensemblistes
   $$(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c) \qquad (A \cap B)^c = (A^c) \cup (B^c)$$
4. L'utilisation des symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ comme abréviations de "si et seulement si" ou "implique" est à proscrire dans un texte rédigé.

0.4 $\forall$ $\exists$

Si A et H sont deux parties d'un même ensemble E et si $\mathcal{H}$ est une propriété caractéristique de H,

. l'assertion $A \subseteq H$ signifie : *pour tout élément a de A, $\mathcal{H}(a)$ est vraie,*
  ce qui se note : $(\forall a \in A)\ \mathcal{H}(a)$

. $A \cap H \neq \emptyset$ signifie : *il existe dans A un élément a qui possède la propriété $\mathcal{H}$*
  ce qu'on note[5] : $(\exists a \in A)\ \mathcal{H}(a)$

[5] dans ces deux notations, la lettre a est une "variable muette" ; elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre à condition de le faire <u>dans tout l'énoncé de l'assertion</u>

Les assertions contraires s'en déduisent immédiatement :

$$\begin{array}{rcl} \text{non}\Big((\forall a\in A)\ \mathcal{H}(a)\Big) & = & \text{non}(A\subseteq H) \\ & = & \Big(A\cap H^c\neq\emptyset\Big) \\ & = & \Big((\exists a\in A)\ a\in H^c\Big) \\ & = & \Big((\exists a\in A)\ a\notin H\Big) \\ & = & \Big((\exists a\in A)\ \text{non}\ \mathcal{H}(a)\Big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{non}\Big((\exists a\in A)\ \mathcal{H}(a)\Big) & = & \text{non}(A\cap H\neq\emptyset) \\ & = & \Big(A\cap H=\emptyset\Big) \\ & = & \Big(A\subseteq H^c\Big) \\ & = & \Big((\forall a\in A)\ a\in H^c\Big) \\ & = & \Big((\forall a\in A)\ \text{non}\ \mathcal{H}(a)\Big) \end{array}$$

Remarque Quel que soit le sous-ensemble A de E, de propriété caractéristique $\mathcal{A}$, et quelle que soit la propriété $\mathcal{H}$ définie sur E, les assertions

$$\Big[(\forall a\in A)\ \mathcal{H}(a)\Big] \qquad \Big[\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{H}\Big] \qquad \Big[(\forall a\in E)\ \big[(a\in A)\ \text{imp}\ \mathcal{H}(a)\big]\Big]$$

ont même valeur. On peut aussi les écrire (par abus de notation) :

$$(\forall a\in E)\ \big[(a\in A)\Rightarrow\mathcal{H}(a)\big]$$

. On note $(\exists! a\in A)\ \mathcal{H}(a)$ l'assertion *parmi les éléments de A, il en existe un et un seul qui possède la propriété $\mathcal{H}$* c'est-à-dire : *$A\cap H$ est un singleton*

0.5 $\bigcap\limits_{i\in I}$ $\bigcup\limits_{i\in I}$ $\biguplus\limits_{i\in I}$

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de parties d'un même ensemble E, on définit leur intersection et leur union par :

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{a\in E : (\forall i\in I)\ a\in A_i\} \qquad \bigcup_{i\in I} A_i := \{a\in E : (\exists i\in I)\ a\in A_i\}$$

Si les A_i sont deux-à-deux disjointes, c'est-à-dire si $\Big((i\neq j)\Rightarrow(A_i\cap A_j=\emptyset)\Big)$, on note $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$ au lieu de $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ [6].

[6] L'emploi de $\biguplus$ sous-entend la disjonction deux-à-deux des ensembles ainsi réunis.
De même qu'on note quelquefois $A+B$ pour $A\biguplus B$, on écrit parfois $\sum\limits_{i\in I} A_i$ pour $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$

0.6 $\mathbb{1}_A$

En la composant par l'application qui, à toute assertion, associe sa valeur, toute propriété sur un ensemble E – et en particulier la propriété caractéristique d'une partie de E – peut être considérée comme une application de E dans $\{V, F\}$. En codant V par 1 et F par 0, on peut ainsi caractériser toute partie A de E par une application $\mathbb{1}_A$ de E dans $\{0,1\}$, appelée fonction indicatrice de A, définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right.$$

Les identités $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A \uplus B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ facilitent la démonstration des propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$.

0.7 Images directe et réciproque

Définition *Si h est une application de E dans F et si A et B sont respectivement des parties de E et F,*

. *on appelle image (directe) de A par h le sous-ensemble de F :*

$$h(A) := \{y \in F : (\exists x \in A)\ h(x) = y\}$$

. *on appelle image réciproque de B par h le sous-ensemble de E :*

$$h^{-1}(B) := \{x \in E : h(x) \in B\}$$

Remarques

1. Si $x \in E$, il ne faut pas confondre $h(x)$, qui est un élément de F, avec $h\big(\{x\}\big)$, qui est un sous-ensemble de F (à un seul élément).
2. Dans le cas particulier où h est bijective, on note également h^{-1} la bijection réciproque qui, à tout y de F associe l'unique x de E tel que $h(x) = y$.
Il faut alors se garder de confondre $h^{-1}(y)$, qui est un élément de E, avec $h^{-1}\big(\{y\}\big)$, qui est un sous-ensemble de E (à un seul élément).
3. Si $y \in F$, et si h n'est pas injective, l'ensemble $h^{-1}\big(\{y\}\big)$ peut ne pas être un singleton (et $h^{-1}(y)$ n'a pas de sens).

Les propriétés essentielles de l'image réciproque par une application h de E dans F sont :

. $h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $h^{-1}(F) = E$

. $h^{-1}(B^c) = \Big(h^{-1}(B)\Big)^c$ (attention : les deux ^{c} n'ont pas la même signification)

. $h^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I} h^{-1}(B_i)$ et $h^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} h^{-1}(B_i)$

. $h^{-1}(\biguplus\limits_{i\in I} D_i) = \biguplus\limits_{i\in I} h^{-1}(D_i)$

Notation

En probabilité, on emploie couramment la notation $\{h \in B\}$ pour $h^{-1}(B)$:

$$\{h \in B\} := \{x \in E : h(x) \in B\}$$

De la même façon, si $y \in F$, on notera $\{h = y\}$ pour $h^{-1}\big(\{y\}\big)$:

$$\{h = y\} := \{x \in E : h(x) = y\}$$

Enfin, si k est une autre application de E dans F, on notera

$$\{h = k\} := \{x \in E : h(x) = k(x)\}$$

$$\{h < k\} := \{x \in E : h(x) < k(x)\} \quad \text{si } F \subseteq \mathbb{R}$$

$$\ldots$$

0.8 Relation - Application croissante

1. **Définition** *Une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est une correspondance entre certains éléments de E et certains éléments de F.*

   Par exemple, *est un diviseur de* est une relation de l'ensemble des nombres premiers vers $\mathbb{N}$.

   Si $\mathcal{R}$ est le nom de la relation, on note $x\mathcal{R}y$ l'assertion x *est en relation avec* y.
   Une relation $\mathcal{R}$ est caractérisable par son graphe : $\big\{(x, y) \in E \times F : x\mathcal{R}y\big\}$.

   Remarque Une application de E dans F est une relation f de E vers F telle que $\quad (\forall x \in E) \quad (\exists! y \in F) \quad xfy$. On peut alors noter $y = f(x)$ pour xfy.

   Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation dans E.
   Par exemple, *est multiple de* est une relation dans $\mathbb{N}$.

2. **Définition** *Une relation $\mathcal{R}$ dans E est dite*

$$\begin{aligned} &\textit{réflexive si} && (\forall x \in E) \quad x\mathcal{R}x \\ &\textit{symétrique si} && \big(\forall (x, y) \in E \times F\big) \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \\ &\textit{antisymétrique si} && \big(\forall (x, y) \in E \times E\big) \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \\ &\textit{transitive si} && \big(\forall (x, y, z) \in E \times E \times E\big) \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

3. **Définition** *Une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée relation d'équivalence.*

   Par exemple, si E est fini, la relation dans $\mathcal{P}(E)$: *comporte autant d'éléments que* est une relation d'équivalence.

4. **Définition** *Une relation réflexive, antisymétrique et transitive est appelée relation d'ordre.*

   Par exemple, $\leqslant$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout ensemble E, $\subseteq$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}(E)$ et $\Rightarrow$ est une relation d'ordre dans l'ensemble des propriétés sur E.

5. **Définition** *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans F et si $\mathcal{R}$' est une relation d'ordre dans F', une application f de F dans F' est dite croissante (relativement à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$) si*

$$\big((\forall (x,y) \in F \times F) \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}'f(y)$$

   Par exemple, si E est un ensemble fini, l'application Card de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ qui, à toute partie A de E, associe le nombre d'éléments de A, est une application croissante (relativement à $\subseteq$ et $\leqslant$).

0.9 $\sum$ $\prod$

1. **Définition** *Si $(x_i)_{i=0 \text{ à } q}$ est une suite finie de nombres réels ou complexes, on note $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_{n=0 \text{ à } q}$ la suite finie définie par récurrence par :*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \left| \begin{array}{ll} x_0 & \textit{si } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i + x_n & \textit{si } 1 \leqslant n \leqslant q \end{array} \right.$$

   Si p et n sont deux indices de la suite (x_i) tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note

$$\sum_{i=p}^{n} x_i := \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{p-1} x_i$$

   Remarques

   (a) L'indice i étant "muet", on peut en changer. Par exemple, en posant $j := i - p$: $\quad \sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{j=0}^{n-p} x_{j+p} \qquad (= x_p \quad \text{si } n = p)$.

   (b) Pour tous indices m, n, p tels que $0 \leqslant m \leqslant n < p \leqslant q$,

$$\sum_{i=m}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{p} x_i = \sum_{i=m}^{p} x_i$$

   (c) Une récurrence élémentaire montre que, pour toute constante a,

$$a \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (a x_i) \quad \text{qu'on note } \sum_{i=0}^{n} a x_i.$$

2. Pour toute permutation φ de $[\![0 , n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{\varphi(i)} = \sum_{i=0}^{n} x_i.$

   Cette propriété (qui se démontre par récurrence) confirme l'idée intuitive que "par associativité et commutativité de l'addition", la somme des éléments d'un ensemble **fini** de nombres ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les additionne. Si $K := \{x_0, \ldots, x_n\}$ est un tel ensemble, le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$ peut donc, sans ambigüité, être noté $\displaystyle\sum_{i\in[\![0,n]\!]} x_i$ ou même[7] $\displaystyle\sum_{x\in K} x$ et toutes les règles du calcul algébrique restent valables pour de telles sommes d'un nombre **fini** de termes.

3. Pour toute famille **finie** $(x_i)_{i\in I}$ de réels, notons I_- le nombre de x_i strictement négatifs. Alors

$$\prod_{i\in I} x_i := \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad (\exists i \in I)\ x_i = 0 \\ (-1)^{I_-}\ e^{\sum\limits_{i\in I} \ln(|x_i|)} & \text{sinon} \end{array} \right.$$

   définit le produit (sans ordre imposé) des éléments de cette famille.

4. Pour toute partie finie D de $\mathbb{N}^2$, notons

$$D' := \{i \in \mathbb{N} : (\exists j \in \mathbb{N})\ (i,j) \in D\} \quad \text{et} \quad D'' := \{j \in \mathbb{N} : (\exists i \in \mathbb{N})\ (i,j) \in D\}$$

   et, pour tout $(i,j) \in D' \times D''$,

$$D'_j := \big\{i \in \mathbb{N} : (i,j) \in D\big\} \quad \text{et} \quad D''_i := \big\{j \in \mathbb{N} : (i,j) \in D\big\}.$$

   Alors, si $(a_{i,j})_{(i,j)\in D}$ est une famille finie de nombres indexés par D,

$$\sum_{i\in D'} \Big(\sum_{j\in D''_i} a_{i,j} \Big) = \sum_{(i,j)\in D} a_{i,j} = \sum_{j\in D''} \Big(\sum_{i\in D'_j} a_{i,j} \Big)$$

5. Si l'ensemble D est un produit cartésien, c'est-à-dire si

$$D = D' \times D'' \quad (= D'_i \times D''_j \text{pour tout } (i,j) \in D)$$

   et si, $\forall (i,j) \in D$, $a_{i,j}$ est un produit "à indices séparés" : $a_{i,j} = b_i c_j$,

[7] par convention, $\displaystyle\sum_{x\in K} x = 0$ si $K = \emptyset$

la somme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in D} a_{i,j}$ est elle-même un produit :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in D} b_i c_j &= \sum_{i\in D'}\Big(\sum_{j\in D''} b_i c_j\Big) \\
&= \sum_{i\in D'}\Big(b_i \sum_{j\in D''} c_j\Big) \\
&= \sum_{i\in D'}(b_i C) \qquad \text{où } C = \sum_{j\in D''} c_j \\
&= \sum_{i\in D'} b_i C \\
&= \Big(\sum_{i\in D'} b_i\Big) C \\
&= \Big(\sum_{i\in D'} b_i\Big)\Big(\sum_{j\in D''} c_j\Big)
\end{aligned}$$

6. **Définition** *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite (infinie) de nombres, on note $\displaystyle\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par :*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \left|\begin{array}{ll} x_0 & \textit{si } n=0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_i + x_n & \textit{si } n \geqslant 1 \end{array}\right.$$

Si la suite $\displaystyle\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)$ converge, on dit que la série de terme général x_i converge ; le nombre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x_i$ est alors appelé "somme de la série" et noté $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i$.

Remarque Les propriétés de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}$ ne s'étendent pas toutes[8] à $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}$.

En particulier, si φ est une permutation de $\mathbb{N}$, la convergence de la série de terme général $x_{\varphi(i)}$ n'est pas équivalente à celle de la série de terme général x_i et, même si les deux séries convergent, il se peut que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_{\varphi(i)} \neq \sum_{i=0}^{\infty} x_i$.

La notation $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ n'a donc pas de sens en général mais on peut lui en donner un dans deux cas particuliers :

7. (a) Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite (infinie) de nombres **réels positifs ou nuls** et si φ est une permutation de $\mathbb{N}$, la convergence de la série de terme général $x_{\varphi(i)}$ est équivalente à celle de la série de terme général x_i et, en cas de convergence, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_{\varphi(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$.

[8] et en particulier pas celles qui découlent d'un raisonnement par récurrence

(b) Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite (infinie) de nombres réels ou complexes telle que la série de terme général $|x_i|$ converge (convergence absolue), alors

i. la série de terme général x_i converge également,

ii. pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $x_{\varphi(i)}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_{\varphi(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$.

Il suffit donc que la série de terme général x_i soit absolument convergente [9] pour que la somme des x_i soit indépendante de l'ordre de sommation.

Si cette condition est satisfaite, le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ peut, sans ambigüité, être noté $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ – ou même $\displaystyle\sum_{x\in K} x$ si les termes de la suite (x_i) sont tous distincts et si on a noté $K := \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

0.10 A_n^p $n!$ $\binom{n}{p}$

Définitions

1. *Si p et n sont deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note* [10] A_n^p *le produit des p entiers consécutifs dont le plus grand est n :* $\mathrm{A}_n^p := \displaystyle\prod_{k=n-p+1}^{n} k.$

2. *Le nombre A_n^n est noté* [11] *$n\,!$: $n\,! := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k.$*

   Par convention, on généralise ces notations en posant

   . *$0\,! = 1$*

   . $\mathrm{A}_n^0 = 1$ *pour tout $n \in \mathbb{N}$*

   . $\mathrm{A}_n^p = 0$ *si $n \notin \mathbb{N}$ ou $p \notin \mathbb{N}$ ou $p > n$.*

3. *Si p et n sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, on note* [12] $\displaystyle\binom{n}{p} := \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$

   et on généralise en posant $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$ si $n \notin \mathbb{N}$ ou $p \notin \mathbb{N}$ ou $p > n$.

Remarque Si p et n sont deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

[9] ou qu'il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $x_{\varphi(i)}$ soit absolument convergente

[10] A_n^p se lit "a,n,p"

[11] $n\,!$ se lit "factorielle n"

[12] $\binom{n}{p}$ se lit "p parmi n". Ce nombre est également noté C_n^p ; il se lit alors "c,n,p".

Propriétés élémentaires des nombres A_n^p , $n!$, et $\dbinom{n}{p}$

1. $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
2. $$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$
3. $$\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$$
4. Pour tout $m \in [\![0 \ , \ \mathrm{n}]\!]$,

$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{p} \binom{m}{j}\binom{n-m}{p-j} \quad \text{(formule de Vandermonde)}$$

Selon les valeurs respectives de m, n et p, certains termes de cette somme peuvent être nuls. Précisément :

$$\binom{n}{p} = \sum_{j=\max(0,p-n+m)}^{\min(m,p)} \binom{m}{j}\binom{n-m}{p-j}$$

et la propriété 2 n'est que le cas particulier où m=1.

5. Pour tout entier naturel n et tout couple (a, b) de nombres réels ou complexes,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

6. Pour tout entier naturel n, $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Certaines de ces propriétés sont évidentes ; les autres peuvent se démontrer par récurrence. Toutes seront retrouvées sans calcul dans le paragraphe "Dénombrements".

Comportements asymptotiques

1. $$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \qquad \text{(formule de Stirling)}$$
2. $$\mathrm{A}_n^p \underset{n\to\infty}{\sim} n^p \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{p} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}$$
3. $$\frac{\dbinom{n_1}{k}\dbinom{n_2}{n-k}}{\dbinom{n_1+n_2}{n}} \underset{\substack{n_1,n_2\to\infty \\ \frac{n_1}{n_1+n_2}\to a}}{\longrightarrow} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k}$$
4. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie non nulle λ, alors la suite $\left(\binom{n}{k} a_n^k (1-a_n)^{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} a_n^k (1-a_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

0.11 Dénombrements

Dans ce paragraphe :

. on ne considère que des ensembles finis,

. le nombre d'éléments d'un ensemble E est noté $|E|$,

. ce nombre est noté en indice du nom de l'ensemble : $|E_n| = n$.

1. **Dénombrements d'ensembles, sous-ensembles, applications etc...**

   (a) **n-listes**
   Le nombre d'éléments du produit cartésien de n ensembles identiques à F_m est $|F_m \times F_m \times \cdots \times F_m| = m^n$, ce qui peut être énoncé :

   m^n est le nombre de n-listes $(e_1, e_2, ..., e_n)$ qu'on peut former avec des éléments de F_m.

   (b) **Arrangements**
   De la même façon, A_m^n est le nombre de n-listes sans répétition qu'on peut former avec des éléments de F_m. C'est donc aussi le nombre de façons de choisir une partie ordonnée de n éléments distincts à prendre dans un ensemble de m éléments :

   A_m^n est le nombre d'arrangements de n objets pris parmi m.

   (c) **Nombre d'applications de E_n dans F_m**
   Pour construire une application g de $E_n := \{e_1, e_2, \ \dots, e_n\}$ dans F_m , il suffit de choisir, dans l'ordre, l'image par g de e_1, celle de e_2, ..., celle de e_n. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le nombre de choix possibles de $\big(g(e_1), \dots, g(e_k)\big)$ est m^k :

   . le nombre de choix possibles de $g(e_1)$ est $|F_m| = m = m^1$;

   . quels qu'aient été les choix de $g(e_1), \dots, g(e_k)$, le nombre de choix possibles de $g(e_{k+1})$ est $|F_m| = m$. Donc, si pour un $k \in [\![1, n-1]\!]$, le nombre de choix possibles de $\big(g(e_1), \dots, g(e_k)\big)$ est m^k, le nombre de choix possibles de $\big(g(e_1), \dots, g(e_{k+1})\big)$ est $m^k \times m = m^{k+1}$.

   Il y a donc m^n choix possibles de $\big(g(e_1), g(e_2), ..., g(e_n)\big)$ et cette n-liste caractérise g :

   le nombre d'applications différentes de E_n dans F_m est m^n.

   (d) **Nombre d'injections de E_n dans F_m**
   Il n'existe évidemment aucune application injective de E_n dans F_m si $n > m$. Supposons donc $n \leqslant m$.
   Pour construire une telle injection h, on peut procéder comme ci-dessus mais, un élément de F_m ne pouvant être choisi qu'une seule fois comme image d'un élément de E_n, il n'y a plus que $m(m-1)(m-2).....[m-(n-1)]$ choix possibles de $\big((h(e_1), h(e_2), ..., h(e_n)\big)$, ce qui montre que :

le nombre d'injections différentes de E_n dans F_m est A_m^n.

(e) **Nombre de bijections de E_n sur F_n**
Si $n = m$, toute injection de E_n dans F_m est bijective :

le nombre de bijections différentes de E_n sur F_n est $\mathrm{A}_n^n = n!$

En choisissant $E_n := [\![1 , n]\!]$, on constate que $n!$ est aussi le nombre de façons d'ordonner un ensemble F_n ayant n éléments.
En choisissant $E_n := F_n$, $n!$ apparait comme le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

(f) **Nombre de parties à n éléments d'un ensemble F_m**
Il n'existe évidemment aucune partie à n éléments d'un ensemble F_m si $n > m$. Supposons donc $n \leqslant m$.
On a vu plus haut une première méthode de construction d'une injection h de E_n dans F_m mais une telle injection peut aussi se construire ainsi :

- . d'abord choisir $h(E_n)$, c'est-à-dire une partie à n éléments dans F_m (notons z le nombre de choix possibles),
- . puis choisir une bijection de E_n sur $h(E_n)$: il y a $n!$ choix possibles, quel que soit le choix de $h(E_n)$.

Le nombre d'injections différentes de E_n dans F_m est donc $z \times n!$.
Par conséquent $z \times n! = \mathrm{A}_m^n$ donc $z = \dfrac{\mathrm{A}_m^n}{n!} = \dbinom{m}{n}$.
Il existe donc $\dbinom{m}{n}$ façons de choisir une partie à n éléments dans F_m :

$\dbinom{m}{n}$ est le nombre de combinaisons possibles de n objets pris parmi m .

Remarque $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}$ est donc le nombre total de parties de F_m et on a vu plus haut que cette somme vaut 2^m donc $|\mathcal{P}(F_m)| = 2^m$.

(g) **Interclassements**
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ deux listes avec répétitions possibles dans chacune, mais sans élément commun aux deux listes. Pour former, à partir de ces deux listes, une troisième liste de $n + m$ éléments, obtenue en interclassant les deux premières <u>d'une façon qui respecte les ordres préexistants</u>, on peut commencer par choisir, parmi les $n + m$ rangs de la liste résultat, les n rangs auxquels devront être placés les éléments de la première liste - ce qui peut se faire de $\binom{n+m}{n}$ façons.
Il ne reste alors qu'une seule façon d'attribuer les rangs restants aux éléments de la seconde liste et une seule façon de placer les éléments des deux listes dans l'ordre et aux rangs déjà choisis.

Le nombre d'interclassements possibles de ces deux listes est donc $\dbinom{n+m}{n}$.

2. **Dénombrements d'échantillons, sous-populations etc...**

(a) **Populations dichotomiques**

Une *population dichotomique* est un ensemble d'objets qui présentent tous l'une ou l'autre des deux seules formes possibles A ou B d'un caractère (par exemple, l'ensemble des jours de l'année 2006 , le caractère choisi étant *gel à minuit à la station météorologique de la tour Eiffel*, en notant A := *moins de 0° = gel* et B := *au moins 0° = pas de gel*).
Les éléments d'une population sont appelés des *individus*.
La *taille* d'une population est le nombre des individus qui la constituent.

Dans la suite de ce paragraphe, on note

- E_N une population dichotomique,
- F_{N_1} la sous-population de E_N formée des individus du type A,
- G_{N_2} la sous-population de E_N formée des individus du type B,
- $a := \frac{N_1}{N}$ la proportion dans E_N d'individus du type A.

($N_1 + N_2 = N$ et la proportion dans E_N d'individus du type B est $1 - a$)

(b) **Sous-populations**

Il existe $\binom{N}{n}$ façons de choisir dans E_N une sous-population de taille n.
Parmi ces $\binom{N}{n}$ sous-populations, combien sont constituées de k individus du type A et $n - k$ du type B ?
Choisir une telle sous-population de E_N peut se faire en choisissant d'abord une sous-population de taille k dans F_{N_1} puis une sous-population de taille $n - k$ dans G_{N_2} puisqu'il n'existe qu'une seule façon de les réunir ensuite en une unique sous-population de E_N.
Le nombre de choix possibles de la première sous-population est $\binom{N_1}{k}$, le nombre de choix possibles de la seconde est $\binom{N_2}{n-k}$ donc le nombre des sous-populations de taille n de E_N qui comprennent exactement k individus du type A est $\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ (c'est bien un produit car, quels que soient les k individus du type A choisis, il reste exactement $\binom{N_2}{n-k}$ façons de compléter la sous-population).

Remarque Il en découle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ est le nombre total de sous-populations de taille n de E_N, ce qui prouve la formule de Vandermonde.

(c) **Sous-populations ordonnées**

Les résultats possibles d'une succession de n tirages <u>sans remise</u> d'un individu dans E_N sont des sous-populations ordonnées de taille n c'est-à-dire des n-listes d'individus <u>tous différents</u> pris dans E_N. On sait qu'il existe A_N^n tels arrangements. Quel est le nombre t_k de ceux qui comportent exactement k individus du type A et $n - k$ du type B ?
Choisir une telle sous-population ordonnée peut se faire de deux manières :

- On peut choisir dans E_N une sous-population (non ordonnée) de taille n qui comprenne exactement k individus du type A, ce qui peut se faire de $\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ façons, puis ordonner cette sous-population, ce qui peut être fait de $n!$ facons quels que soient les individus choisis. Par suite, $t_k = \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}n!$.

- Une autre méthode consiste à choisir une sous-population ordonnée de taille k dans F_{N_1} ($A^k_{N_1}$ choix possibles) et une sous-population ordonnée de taille $n-k$ dans G_{N_2} ($A^{n-k}_{N_2}$choix possibles) puis à interclasser ces deux listes $\left(\binom{k+(n-k)}{k} = \binom{n}{k} \text{ possibilités}\right)$. Il en découle que $t_k = A^k_{N_1}A^{n-k}_{N_2}\binom{n}{k}$, ce qui est bien le même nombre que $\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}n!$.

(d) **Echantillons**

Il existe N^n façons de choisir dans E_N un *n-échantillon*, c'est-à-dire une liste de n individus pris dans E_N avec possibilité de répétitions. Chacun de ces N^n échantillons peut être le résultat d'une succession de n tirages avec remise d'un individu dans E_N. Quel est le nombre de ceux qui sont constitués de k individus du type A et $n-k$ du type B ?

Pour former un tel n-échantillon , on peut

- d'abord choisir un k-échantillon dans F_{N_1} (N_1^k choix possibles),
- ensuite choisir un $(n-k)$-échantillon dans G_{N_2} (N_2^{n-k} choix possibles),
- enfin interclasser ces deux échantillons $\left(\binom{n}{k} \text{ possibilités}\right)$.

Le nombre de tels n-échantillons est donc $\displaystyle\binom{n}{k}N_1^kN_2^{n-k}$.

(e) **Population à plus de deux classes**

Dans une population de taille N composée de N_1 individus du type A_1, N_2 du type A_2,..., N_r du type A_r – où $N_1+N_2+\cdots+N_r = N$ – de combien de façons peut-on tirer un n-échantillon comportant k_1 individus du type A_1, k_2 du type A_2, ..., k_r du type A_r si $k_1+k_2+...+k_r = n$?

Il existe $N_1^{k_1}\dots N_r^{k_r}$ façons de choisir les r sous-échantillons qu'il ne reste qu'à interclasser.

Pour faire cet interclassement, on peut d'abord choisir les rangs auxquels seront tirés les k_1 individus du type A_1 (il y a $\binom{n}{k_1}$ façons de faire ce choix) puis choisir, parmi les $n-k_1$ rangs restants, k_2 rangs pour les k_2 individus du type A_2 (il y a $\binom{n-k_1}{k_2}$ façons de faire ce choix) ...et il ne restera en fin de compte qu'une seule façon de placer les k_r individus du type A_r aux $n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-1} = k_r$ rangs restants.

Le nombre cherché est donc

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{k_r}{k_r}N_1^{k_1}\dots N_r^{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}N_1^{k_1}\dots N_r^{k_r}$$

Remarque Le *coefficient multinômial*

$$\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r} := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!} & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} (k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r \\ k_1+\cdots+k_r = n \end{array}\right. \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

généralise le coefficient binômial $\left(\text{si } r=2,\ \binom{n}{k,n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\right)$

et la formule de Newton se généralise en

$$\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r \\ k_1+\cdots+k_r=n}} \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r} a_1^{k_1}\dots a_r^{k_r} = (a_1+\cdots+a_r)^n$$

Exercices sur le chapitre 0

Ex 0-0

Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?

1. $$\begin{array}{ll} 0^2 - 0 + 41 & \text{est un nombre premier,} \\ 1^2 - 1 + 41 & \text{est un nombre premier,} \\ 2^2 - 2 + 41 & \text{est un nombre premier,} \\ 3^2 - 3 + 41 & \text{est un nombre premier,} \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

   donc $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 - n + 41 \quad$ est un nombre premier.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de nombres réels. On note $u_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Soit $\mathcal{R}$ une propriété sur $\mathbb{R}$ telle que

   (a) u_0 possède la propriété $\mathcal{R}$,

   (b) pour tout entier naturel n, u_{n+1} possède la propriété $\mathcal{R}$ si u_n la possède.

   Il en résulte par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n possède la propriété $\mathcal{R}$. Donc u_∞ possède la propriété $\mathcal{R}$.

Ex 0-1

1. Combien existe-t'il de connecteurs logiques ?
2. Montrer que tous peuvent s'écrire à l'aide des seuls connecteurs "non" et "et".

Ex 0-2

L'affirmation *(3 est pair)* équ *(6 est impair)* est-elle une assertion ?

Ex 0-3

1. Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ des propriétés caractéristiques de trois parties A, B et D d'un même ensemble E. Déterminer les parties de E caractérisées par

   (a) (non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$

   (b) $\mathcal{A}$ imp $\mathcal{B}$

   (c) (non $\mathcal{B}$) imp (non $\mathcal{A}$)

2. Montrer que

   (a) $\big[\ \mathcal{A}$ et (non $\mathcal{A}$) $\big] \Rightarrow \mathcal{B}$

   (b) $\big[\ \mathcal{A}$ équ $\mathcal{B}\ \big] \Rightarrow \big[$ ($\mathcal{A}$ imp $\mathcal{D}$) équ ($\mathcal{B}$ imp $\mathcal{D}$) $\big]$

   (c) $\mathcal{A} \Rightarrow$ ($\mathcal{D}$ imp $\mathcal{A}$)

Ex 0-4

Soit E un ensemble et Δ l'opération dans $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$A\Delta B := (A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

1. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A\Delta B = (A\backslash B)\uplus(B\backslash A)$.
2. Si $E=\mathbb{R}^2$, représenter l'ensemble $\big(\,]-1,+1[\times\mathbb{R}\,\big)\Delta\big(\,\mathbb{R}\times]-1,+1[\,\big)$.

Ex 0-5

Enoncer l'assertion contraire de l'assertion

dans toute prison, l'un au moins des détenus déteste tous les gardiens.

Ex 0-6

1. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux propriétés sur un même ensemble E.
   L'assertion contraire de $\mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ est-elle
   $\mathcal{R} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}$?
   non $\mathcal{P} \;\Rightarrow$ non $\mathcal{R}$?
   non $\mathcal{R} \;\Rightarrow$ non $\mathcal{P}$?
   une autre (laquelle) ?

2. Soit E et F deux ensembles, $\mathcal{S}$ une propriété sur $E\times F$, A une partie de E et B une partie de F.
   (a) Montrer que
   $$\text{non }\big[(\exists\, x\in\; A)\;(\forall y\in B)\;\mathcal{S}(x,y)\big]\;\Leftrightarrow\;\big[(\forall\, x\in\; A)\;(\exists y\in B)\text{ non }\mathcal{S}(x,y)\big]$$
   (b) En déduire que
   $$\text{non }\big[(\forall x\in\; A)\;(\exists y\in B)\;\mathcal{S}(x,y)\big]\;\Leftrightarrow\;\big[(\exists\, x\in\; A)\;(\forall y\in B)\text{ non }\mathcal{S}(x,y)\big]$$
   (c) Montrer que
   $$\big[(\forall\, x\in\; A)\;(\forall\, y\in B)\;\mathcal{S}(x,y)\big]\;\Leftrightarrow\;\big[(\forall\, y\in B)\;(\forall x\in A)\;\mathcal{S}(x,y)\big]$$
   (d) En déduire que
   $$\big[(\exists\, x\in\; A)\;(\exists\, y\in B)\;\mathcal{S}(x,y)\big]\;\Leftrightarrow\;\big[(\exists\, y\in B)\;(\exists x\in A)\;\mathcal{S}(x,y)\big]$$
   (e) Montrer par un contre-exemple que
   $$\big[(\forall\, x\in\; A)\;(\exists\, y\in B)\;\mathcal{S}(x,y)\big]\;\not\Leftrightarrow\;\big[(\exists\, y\in B)\;(\forall x\in A)\;\mathcal{S}(x,y)\big]$$

Ex 0-7

Vrai ou faux ?

(A) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(B) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(C) $(\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(D) $(\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(E) $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(F) $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(G) $(\exists\, \epsilon > 0)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(H) $(\exists\, \epsilon > 0)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(I) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(J) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(K) $(\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(L) $(\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(M) $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(N) $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, \epsilon > 0)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(O) $(\exists\, \epsilon > 0)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} < \epsilon$

(P) $(\exists\, \epsilon > 0)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{n} \geqslant \epsilon$

(Q) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\forall\, x \in [0\,,\,1[)\ (\exists\, N \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, n \geqslant N)\quad x^n < \epsilon$

(R) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, N \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, x \in [0\,,\,1[)\ (\forall\, n \geqslant N)\quad x^n < \epsilon$

(S) $(\forall\, a \in [0\,,\,1[)\ (\forall\, \epsilon > 0)\ (\exists\, N \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, x \in [0\,,\,a])\ (\forall\, n \geqslant N)\quad x^n < \epsilon$

(T) $(\forall\, \epsilon > 0)\ (\forall\, a \in [0\,,\,1[)\ (\exists\, N \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, n \geqslant N)\ (\forall\, x \in [0\,,\,a])\quad x^n < \epsilon$

(U) si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux propriétés sur un même ensemble E
$\Big[(\forall\, x \in E)\ \big[\mathcal{R}(x) \text{ ou } \mathcal{S}(x)\big]\Big] \Leftrightarrow \Big[\big[(\forall\, x \in E)\ \big[\mathcal{R}(x)\big] \text{ ou } \big[(\forall\, x \in E)\ \mathcal{S}(x)\big]\Big]$

Ex 0-8

D, H, K sont trois parties d'un même ensemble E .
Vrai ou faux ?

(a) $H\backslash(K \cup D) = (H\backslash K) \cap (H\backslash D)$

(b) $(H\backslash K)\backslash D = H \cap K^c \cap D^c$

(c) $(H \cup K)\backslash D = (H\backslash D) \cup (K\backslash D)$

Ex 0-9

Quels sont les ensembles $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big[0\ ,\ \frac{(-1)^n}{n}\Big]$ et $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,\pi[}\Big[-1\ ,\ \cos(x)\Big]$?

Ex 0-10

$(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux familles de parties d'un même ensemble E et $D\subseteq E$. Vrai ou faux ?

(d) $$\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)^c=\bigcap_{i\in I}(A_i^c)$$

(e) $$\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)^c=\bigcup_{i\in I}(A_i^c)$$

(f) $$D\cup\big(\bigcup_{i\in I}A_i\big)=\bigcup_{i\in I}(D\cup A_i)$$

(g) $$D\cap\big(\bigcap_{i\in I}A_i\big)=\bigcap_{i\in I}(D\cap A_i)$$

(h) $$\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{j\in J}B_j\Big)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$$

(i) $$\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)\cap\Big(\bigcap_{j\in J}B_j\Big)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$$

(j) $$D\cap\big(\bigcup_{i\in I}A_i\big)=\bigcup_{i\in I}(D\cap A_i)$$

(k) $$D\cup\big(\bigcap_{i\in I}A_i\big)=\bigcap_{i\in I}(D\cup A_i)$$

(l) $$\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{j\in J}B_j\Big)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$$

(m) $$\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)\cup\Big(\bigcap_{j\in J}B_j\Big)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$$

Ex 0-11

Soit F un ensemble, B et B' deux parties de F non disjointes et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de F. Certaines des fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices d'une partie de F ? Si oui, quelles parties de F caractérisent-elles ?

(n) $\min\{\mathbb{1}_{B_i} : i\in I\}$, (o) $\max\{\mathbb{1}_{B_i} : i\in I\}$

(p) $\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_{B'}$, (q) $|\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{B'}|$, (r) $\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_{B'}-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{B'}$

(s) $\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_{B'}-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{B'}$, (t) $\mathbb{1}_{B\setminus B'}+\mathbb{1}_{B'\setminus B}$, (u) $\mathbb{1}_{B\cup B'}-\mathbb{1}_{B\cap B'}$

Ex 0-12

Pour tout ensemble fini G, on note $|G| :=$ *nombre d'éléments de* G.

1. Montrer que
   (a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
   (b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$
2. Pour tout couple (j, n) d'entiers tels que $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $\mathcal{P}_j(n)$ l'ensemble des parties à j éléments de $[\![1 , n]\!]$.
   (a) Soit $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels. Montrer que
   $$\prod_{j \in [\![1,n]\!]} (1 - a_j) = 1 + \sum_{j \in [\![1,n]\!]} (-1)^j \sum_{I \in \mathcal{P}_j(n)} \prod_{i \in I} a_i$$
   (b) Soit $A_1, \ldots, A_n$ n parties d'un même ensemble fini E.
      i. Montrer que $\quad \mathbb{1}_E - \prod_{j \in [\![1,n]\!]} (\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{A_j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{I \in \mathcal{P}_j(n)} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$
      ii. Calculer $\sum_{x \in A} \mathbb{1}_A(x)$ si $A \in \mathcal{P}(E)$.
      iii. En déduire la "formule d'inclusion-exclusion" :
      $$|\bigcup_{j=1}^{n} A_j| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{I \in \mathcal{P}_j(n)} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Ex 0-13

Soit φ une application d'un ensemble E dans un ensemble F, A et A' deux parties de E, B et B' deux parties de F.

1. Vrai ou faux ?
   (a) $\varphi(E) = F$, (b) $\varphi(A^c) = \big(\varphi(A)\big)^c$
   (c) $\varphi(A \cup A') = \varphi(A) \cup \varphi(A')$, (d) $\varphi(A \cap A') = \varphi(A) \cap \varphi(A')$
2. Montrer que
   (e) $A \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big)$, (f) φ est injective $\Leftrightarrow \Big[(\forall H \subseteq E)\ \varphi^{-1}\big(\varphi(H)\big) = H\Big]$
   (g) $\varphi\big(\varphi^{-1}(B)\big) \subseteq B$, (h) φ est surjective $\Leftrightarrow \Big[(\forall K \subseteq F)\ \varphi\big(\varphi^{-1}(K)\big) = K\Big]$
   (i) $\big[B \subseteq B'\big] \Rightarrow \big[\varphi^{-1}(B) \subseteq \varphi^{-1}(B')\big]$, (j) $\varphi^{-1}(B' \backslash B) = \varphi^{-1}(B') \backslash \varphi^{-1}(B)$
3. Reformuler les propriétés essentielles de l'image réciproque en employant la notation $\{\varphi \in B\}$ pour $\varphi^{-1}(B)$.

Ex 0-14

Soit $(x_i)_{i=0 \text{ à } q}$ une suite finie de nombres et $\mathcal{R}$ la propriété sur $[\![0 , q]\!]$ définie par

$$\mathcal{R}(n) := \Big[\text{pour toute permutation } \varphi \text{ de } [\![0 , n]\!] , \quad \sum_{i=0}^{n} x_{\varphi(i)} = \sum_{i=0}^{n} x_i\Big]$$

1. Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un entier n de $[\![0 , q\text{-}1]\!]$.
   Si ψ est une permutation de $[\![0 , n+1]\!]$ telle que $\psi(n+1) \neq n+1$, notons
   . ψ' la permutation de $[\![0 , n+1]\!]$ définie par

   $$\psi'(k) := \left| \begin{array}{ll} n+1 & \text{si} \quad k = \psi(n+1) \\ \psi(n+1) & \text{si} \quad k = n+1 \\ k & \text{sinon} \end{array} \right.$$

   . φ la restriction de $\psi' \circ \psi$ à $[\![0 , n]\!]$.
   (a) Vérifier que φ est une permutation de $[\![0 , n]\!]$ telle que

   $$\varphi(i) := \left| \begin{array}{ll} \psi(n+1) & \text{si} \quad \psi(i) = n+1 \\ \psi(i) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

   (b) En déduire que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est vraie sur $[\![0 , q]\!]$ tout entier.

Ex 0-15

Soit n un entier naturel non nul et $(x_j)_{j=1 \text{ à } n}$ une suite finie de nombres réels.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} j x_j$.
2. (a) En déduire que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{2^j}$.
3. Calculer de deux manières $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Ex 0-16

Pour tout entier naturel i, on note $x_i := \dfrac{4}{1+(-1)^i(2i+3)}$.

1. Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$.
2. (a) Pour tout entier naturel k, on note $I_k := [\![2^{k+1}-2, 2^{k+2}-3]\!]$ et φ_k une permutation de I_k qui, aux 2^k premiers entiers de I_k, associe les 2^k entiers pairs de I_k [13].

[13] par exemple $\varphi_k(i) = \dfrac{i-1}{2} + \big(2^k - \dfrac{1}{2}\big)\big(2 - \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(i)\big)$ où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.

Vérifier que $\biguplus_{k\in\mathbb{N}} I_k = \mathbb{N}$ et en déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{N}$ par $\varphi(i) := \varphi_k(i)$ si $i \in I_k$ est une permutation de $\mathbb{N}$.

(b) Montrer que

i. $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{2^{p+1}-3} x_{\varphi(i)} = 0$

ii. $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \displaystyle\sum_{i=2^{p+1}-2}^{2^{p+1}+2^p-3} x_{\varphi(i)} = \sum_{j=2^p-1}^{2^{p+1}-2} x_{2j}$

(c) En déduire que, pour tout entier naturel p, $\displaystyle\sum_{i=0}^{2^{p+1}+2^p-3} x_{\varphi(i)} > \frac{1}{2}$.

(d) Etudier la convergence de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_n := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{\varphi(i)}$.

3. Conclure.

Ex 0-17

Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls.

A toute permutation θ de $\mathbb{N}$, on associe

. la suite croissante $\big(S_n(\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n(\theta) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_{\theta(i)}$

. le "nombre" $S(\theta) := \left| \begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{\theta(i)} & \text{si la suite } \big(S_n(\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{array} \right.$

Soit φ et ψ deux permutations de $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel n, on note $j_n := \psi^{-1}\big(\varphi(n)\big)$.
Pour tout entier naturel N, on note

$$M_N := \max\big\{j_n : n \in [\![\, 0 \,,\, \mathrm{N} \,]\!]\big\} \quad \text{et} \quad B_N := \big\{\varphi(k) : k \in [\![\, 0 \,,\, \mathrm{N} \,]\!]\big\}.$$

1. Montrer que $\quad (\forall N \in \mathbb{N}) \quad S_N(\varphi) = S_{M_N}(\varphi)$.
2. En déduire que $\quad S(\varphi) \leqslant S(\psi)$.
3. Montrer que $\quad S(\psi) \leqslant S(\varphi)$ et conclure.

Ex 0-18

n étant un entier naturel, établir les identités suivantes :

1. $\mathrm{A}_{n_1}^{k}\mathrm{A}_{n_2}^{n-k}\binom{n}{k} = \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}n!$
2. $\dfrac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} = \dfrac{\binom{n}{k}\binom{n_1+n_2-n}{n_1-k}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$
3. $\binom{n}{k} = \displaystyle\sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1}$

4. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(-1)^p = 0$
5. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{2j} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{2j+1} = 2^n$
6. $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$

Ex 0-19

n, n_1 et n_2 étant trois entiers naturels, établir les identités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = n_1\binom{n_1+n_2-1}{n-1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = n_1(n_1-1)\binom{n_1+n_2-2}{n-2}$

Ex 0-20

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $a \in]\ 0\ ,\ 1\ [$.

1. Etablir les identités suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x_1^k x_2^{n-k} = n\, x_1(x_1+x_2)^{n-1}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x_1^k x_2^{n-k} = n(n-1)\, x_1^2(x_1+x_2)^{n-2}$
2. En déduire des expressions simples de
   $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}a^k(1-a)^{n-k}.$$

Ex 0-21

On note, si $j \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle T_j(m) := \sum_{k=1}^{m} k^j$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left[(k+1)^{n+1} - k^{n+1}\right] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} T_j(m)$.
2. En déduire une formule de récurrence sur j permettant de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^j$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2$ puis vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul j, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^j$ est un polynôme en m qui s'annule en 0 et en -1.

Ex 0-22

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ les suites définies par

$$u_n := n + \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n := u_n - u_{n-1}$$

   (a) Montrer que $v_n = \dfrac{1}{4n^2} - (n-\dfrac{1}{2})\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j\,n^j}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j\,n^j} \leqslant \frac{1}{3n^2(n-1)}$ et en déduire que $|v_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et qu'il existe un réel α tel que

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie non nulle λ.

   (a) Donner un équivalent, à k fixé, de $\ln\big((1-a_n)^{n-k}\big)$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\binom{n}{k}a_n^k(1-a_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{k\text{ fixé}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Ex 0-23

Evaluer, avec trois décimales, le nombre $\dfrac{\binom{10^6}{10^2}\binom{99.10^6}{99.10^2}}{\binom{10^8}{10^4}}$.

Ex 0-24

Quel est, en base 10, le nombre de chiffres du nombre d'éléments de $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big([\![0\ ,\ 9]\!]\big)\Big)$?

Ex 0-25

Un conseil d'administration de dix personnes est élu chaque année par l'assemblée générale de l'Amicale des Joyeux Probabilistes. Ce conseil doit désigner parmi ses membres un Président, un Secrétaire et un Trésorier qui constituent le bureau de l'association. Un bureau est non renouvelable. Or, depuis la création de l'AJP, les mêmes dix membres fondateurs sont réélus d'année en année au conseil d'administration.

1. Combien d'années cette situation peut-elle perdurer ?
2. Même question si les statuts de l'AJP avaient défini un bureau comme étant composé d'un Président et de deux vice-présidents sans fonction spécifique ?

Ex 0-26

On note S_n^j le nombre de surjections différentes que l'on peut former d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à j éléments.
Par convention, on pose $S_n^0 = 0$ si $j \notin \mathbb{N}^*$ ou $n \notin \mathbb{N}^*$ ou $j > n$.

1. Que valent S_n^1 et S_n^n ?
2. Montrer que, si $n \geqslant 2$, $S_n^2 = 2^n - 2$.

3. (a) Montrer sans calcul que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall k \in [\![1, n]\!])\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} S_n^j = k^n$.

   (b) En déduire une formule de récurrence permettant de calculer les S_n^k.

4. Etablir sans calcul la relation de récurrence (valable si $n \geqslant 2$)

$$S_n^j = j(S_{n-1}^j + S_{n-1}^{j-1}).$$

5. (a) On note $f(x) := e^x - 1$. Montrer que, pour tout k de $[\![1\ ,\ \mathrm{n}]\!]$, il existe des constantes réelles $a_1(k), \ldots, a_k(k) = \mathrm{A}_n^k$ telles que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[f^n(x)\right] = \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} \sum_{j=1}^{k} a_j(k) f^{n-j}(x) f'^j(x)$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} = n!$.

   (c) Montrer que $S_n^j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} (-1)^{j-k} k^n \binom{j}{k}$.

Ex 0-27

On note α_n le nombre de partitions différentes d'un ensemble (non vide) à n éléments.

1. Montrer que $\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i$ (en ayant posé $\alpha_0 = 1$).
2. En déduire que $\alpha_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.
3. Montrer que $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_{n-k} k^n}{k!}$ où on a noté $\beta_m := \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!}$.

Ex 0-28

On note γ_n le nombre des permutations d'un ensemble E_n à n éléments qui ne laissent fixe aucun élément de E_n (on pose $\gamma_0 := 1$).

Pour tout entier naturel m, on note $\beta_m := \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!}$.

Montrer que

1. $\gamma_n = (n-1)(\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2})$ si $n \geqslant 2$
2. $\gamma_n = n\gamma_{n-1} + (-1)^n$ si $n \geqslant 1$
3. $\gamma_n = n!\beta_n$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_n^k \beta_k = n!$

Ex 0-29

De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes qui comporte exactement 2 dames et 2 coeurs ?

Ex 0-30

De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes

1. qui comporte un brelan, mais ni carré ni full ?
   (un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeurs, un carré est un ensemble de quatre cartes de même valeurs, un full est un ensemble de cinq cartes dont trois ont même valeur et les deux autres une même autre valeur).
2. qui ne comporte ni 2 cartes au moins de la même valeur, ni 5 cartes dont les valeurs se suivent, ni 5 cartes d'une même des 4 couleurs ?
   (les quatre "couleurs" sont : Pique, Coeur, Carreau et Trèfle).

Ex 0-31

On pose l'une à côté de l'autre, dans l'ordre de leur sortie, 5 cartes tirées l'une après l'autre et sans remise dans un jeu de 32 cartes.
Combien de figures différentes peut-on obtenir qui comportent exactement 3 trèfles.

Ex 0-32

Reprendre l'exercice précédent dans le cas où on tire les 5 cartes une à une et avec remise.

Ex 0-33

Déterminer le nombre de chemins de longueur n (entier naturel fixé) qui joignent, dans $\mathbb{Z}^2$, le point origine au point de coordonnées (x, y) (on appelle chemin dans $\mathbb{Z}^2$ toute liste de déplacements de longueur 1 parallèles à l'un des axes de coordonnées).
[Indication : noter i, j, k, l les nombres de pas vers la droite, vers la gauche, vers le haut et vers le bas d'un tel chemin et déterminer les relations qui lient i, j, k, l .]

Ex 0-34

1. Montrer qu'il existe $\binom{n+p-1}{n}$ façons d'aligner n points et $p-1$ barres (par exemple : $| \cdot \cdot || \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$).
2. En déduire le nombre de façons de disposer n objets identiques (indiscernables) dans p boîtes distinctes (par exemple numérotées).
3. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$: $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$?

Ex 0-35

De combien de façons peut-on choisir, dans un ensemble de n éléments, une paire de sous-ensembles disjoints ?